



Modélisation par des méthodes lagrangiennes du transport sédimentaire induit par les mascarets

Adrien Berchet

► To cite this version:

Adrien Berchet. Modélisation par des méthodes lagrangiennes du transport sédimentaire induit par les mascarets. Milieux fluides et réactifs. Université de Poitiers, 2014. Français. NNT: . tel-01147211v2

HAL Id: tel-01147211

<https://theses.hal.science/tel-01147211v2>

Submitted on 10 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École Doctorale : **Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécanique,
Énergétique et Aéronautique**

Secteur de Recherche : **Mécanique des Fluides**

Présentée par

Adrien Berchet

Modélisation par des méthodes lagrangiennes du transport sédimentaire induit par les mascarets

Directeur de Thèse :
Serge HUBERSON

Thèse co-encadrée par Anthony BEAUDOIN,
préparée à l'Institut Pprime, Projet MASCARET

Soutenue le 11 décembre 2014

devant la Commission d'Examen

Jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Sylvain GUILLOU	-	LUSAC
	Pierre LUBIN	-	I2M
<i>Directeur :</i>	Serge HUBERSON	-	Institut Pprime
<i>Examineurs :</i>	Anthony BEAUDOIN	-	Institut Pprime
	Philippe DAVY	-	Géosciences Rennes
	Iraj MORTAZAVI	-	CNAM Paris

Remerciements

Je tiens bien sûr à remercier Serge et Anthony pour m'avoir proposé ce sujet puis accompagné tout au long de mon travail. Je remercie aussi Laurent et Lionel pour m'avoir permis de découvrir l'institut Pprime, ce qui m'a amené ensuite à cette thèse. Merci à Germain pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir et ses conseils avisés. Merci évidemment à toutes les autres personnes laboratoire. Merci aux thésards pour la très bonne ambiance qui règne ici, merci aux permanents tout leur travail, merci aux informaticiens qui m'ont permis de travailler sereinement sur des outils efficaces, merci aux secrétaires pour avoir simplifié toutes les démarches administratives que j'ai eu à faire au cours de ces trois années (et elles furent nombreuses!), merci à tous les techniciens qui assurent le bon fonctionnement de tous les outils dont nous avons besoin.

Je remercie tout autant Maïlys, mes parents, ma famille, mes amis et tous ceux qui m'ont accompagnés tout au long de ce périple! Et enfin merci à Pablo sans qui je ne serai probablement pas là aujourd'hui.

Résumé : Le travail effectué au cours de cette thèse s’inscrit au sein du projet ANR Mascaret, dont l’objectif est la compréhension du phénomène de mascaret, l’étude de ses conséquences sur l’environnement et sa sensibilité aux modifications de cet environnement. La contribution de cette thèse s’inscrit uniquement dans la partie numérique de ce projet. Seul l’aspect transport sédimentaire causé par le mascaret sera abordé. Le but est de construire un modèle numérique de transport sédimentaire général qui pourra notamment s’appliquer au cas du mascaret. Trois méthodes numériques sont explorées, une première permettant le suivi individuel des grains sédimentaires et deux autres permettant de suivre l’évolution de la concentration en grains au sein de l’écoulement. La première méthode considérera les plus petites échelles et sera appelée *méthode tracker* et consistera en un suivi individuel des grains sédimentaires. La seconde méthode, dite *méthode particulière*, portera sur des échelles plus larges et le transport d’une concentration locale en grains sédimentaires. Enfin, la troisième méthode, que l’on appellera *méthode des moments*, s’intéressera aux échelles les plus larges en transportant un nuage de particules sédimentaires dans son ensemble grâce à une seule particule numérique caractérisée par les moments de sa distribution en concentration interne. Ceci permettra de caractériser le transport sédimentaire de manière locale qui se produit lors du passage d’un mascaret. Deux mascarets ondulés de nombre de Froude proches seront étudiés. Il sera notamment montré que le nombre de Froude n’est pas un critère permettant de caractériser le transport sédimentaire induit par les mascarets.

Mots clés : Mascaret, transport sédimentaire, transport lagrangien, modélisation particulière, transport turbulent, diffusion, méthode des moments.

Abstract : The work performed during this thesis is a part of the Mascaret ANR project, which aims to understand the phenomenon of tidal bore, the study of its impact on the environment and its sensitivity to changes in that environment. The contribution of this thesis lies solely in the numerical part of this project. Only the sediment transport caused by the tidal bore is discussed. The goal is to build a generic numerical model of sediment transport which can therefore be applied to the specific case of tidal bores. Three methods are explored, a first for individual tracking of sediment grains and two to model the concentration of grains in the flow. The first method considers the smallest scales and will be called *tracking method* and consists of individual tracking of sediment grains. The second method, called *particle method*, focuses on larger scales and the transport of local concentration of sedimentary grains. The third method, which we call *moments method*, will focus on the largest scales, carrying a cloud of sediment grains as a whole using a single numerical particle characterized by the moments of its internal concentration distribution. This will characterize the local sediment transport process occurring during the passage of a tidal bore. Two undulating bores will be studied whose Froude numbers are close. It will be shown in particular that the Froude number is not a criterion to deduce the intensity of the induced tidal bores sediment transport.

Key words : Tidal bore, sediment transport, lagrangian transport, particle method, turbulent transport, diffusion, moment method.

Table des matières

Liste des Symboles et Abréviations	11
1 Introduction	15
1.1 Le phénomène de Mascaret	17
1.1.1 Définition	18
1.1.2 Mascarets et ressauts hydrauliques	19
1.1.3 Conditions d'apparition	26
1.1.4 Hydro-dynamique	28
1.2 Le transport sédimentaire	29
1.2.1 Nature des sédiments	29
1.2.2 Mécanismes de transport	31
1.2.3 Échelles physiques et modélisation	36
2 Méthode tracker	39
2.1 Introduction	39
2.2 Forces appliquées au grain	41
2.2.1 Pesanteur et flottabilité	41
2.2.2 Masse ajoutée	41
2.2.3 Traînée visqueuse	42
2.2.4 Force d'histoire	43
2.3 Extensions de l'équation de Maxey et Riley	43
2.4 Méthodes numériques	47
2.4.1 Trajectoires des grains	48
2.4.2 Turbulence dans le fluide	48
2.4.3 Particules et turbulence	50
2.5 Validation	50
2.5.1 Vitesse de sédimentation	51
2.5.2 Solution analytique en champ oscillant	52
2.6 Études préliminaires	53
2.6.1 Sédimentation	53
2.6.2 Écoulement turbulent	55
2.7 Conclusion	60
3 Méthode particulaire	61
3.1 Introduction	61
3.2 Méthodes numériques	64
3.2.1 Représentation intégrale et discrétisation du problème	64
3.2.2 Calcul de l'évolution des particules numériques	66
3.2.3 Calcul du gradient de concentration	67

3.2.4	Méthode de remaillage	71
3.2.5	Traitement des conditions aux limites	72
3.2.6	Traitement de la turbulence	75
3.3	Validation	75
3.4	Conclusion	78
4	Méthode des moments	81
4.1	Introduction	81
4.2	Méthode de base	82
4.3	Développement de Taylor au second ordre	90
4.4	Maillage adaptatif : division et fusion du nuage elliptique	95
4.4.1	Méthode de division	96
4.4.2	Critère de division	98
4.4.3	Fusion de particules	101
4.5	Prise en compte de la distribution interne du nuage de grains	103
4.5.1	Transformation de la base canonique à la base de Legendre	105
4.5.2	Reconstruction de la concentration à partir des moments de Legendre	106
4.5.3	Sensibilité de la reconstruction	108
4.5.4	Diffusion	112
4.5.5	Advection du nuage de grains	114
4.6	Conclusion	116
5	Correction de la divergence : application aux champs expérimentaux	117
5.1	Introduction	117
5.2	Méthode particulière	119
5.2.1	Dispositif expérimental	119
5.2.2	Corrélation entre la concentration estimée et la divergence de l'écoulement	121
5.2.3	Méthodes de correction	124
5.3	Méthode des moments	128
5.3.1	Évolution de la surface d'un nuage elliptique en présence de divergence	128
5.3.2	Méthode de correction	131
5.4	Conclusion	133
6	Résultats	135
6.1	Milieux poreux	136
6.1.1	Génération de l'écoulement	136
6.1.2	Application de la méthode des moments	137
6.1.3	Conclusion	140
6.2	Mascaret ondulant	140

6.2.1	Méthode tracker	142
6.2.2	Méthode particulaire	159
6.2.3	Méthode des moments	178
6.2.4	Conclusion	184
7	Conclusion et perspectives	187
A	Solutions analytiques de l'évolution de la vitesse verticale d'un grain sédimentaire sphérique lâché dans un fluide au repos	191
B	Solution analytique de l'évolution de la vitesse verticale d'un grain sédimentaire sphérique lâché dans un fluide en oscillation	195
C	Opérations sur les moments	197
C.1	Transformation géométrique des moments	197
C.2	Transport des moments d'un point à un autre	199
D	Modélisation des trajectoires des particules fluides dans le cadre d'une interaction onde-courant	201
	Liste des tableaux	205
	Liste des figures	207
	Bibliographie	215

Liste des Symboles et Abréviations

Abréviation	Description
<i>et al.</i>	En latin <i>et alii</i> , qui se traduit littéralement par <i>et les autres</i>
ADV	En anglais <i>Acoustic Doppler Velocimeter</i> , qui se traduit par Vélocimètre Acoustique à effet Doppler.
etc	En latin <i>et cetera</i> , qui se traduit littéralement par <i>et le reste</i>
LES	En anglais, <i>Large Eddy Simulation</i> : modèle de turbulence proposé par Smagorinsky (1963)
LIF	En anglais <i>Laser Induced Fluorescence</i> , qui se traduit par Fluorescence induite par laser
MSM	En anglais <i>Mixed Scale Model</i> , qui se traduit par Model à échelles mixtes
OBS	En anglais <i>Optical Backscatter Sensor</i> , qui se traduit par Capteur optique de rétrodiffusion.
PIV	En anglais <i>Particle Image Velocimetry</i> , qui se traduit par Vélocimétrie par images de particules
PTV	En anglais <i>Particle Tracking Velocimetry</i> , qui se traduit par Vélocimétrie par Suivi de Particules.
SPH	En anglais <i>Smooth Particle Hydrodynamics</i> : méthode numérique de résolution des équations d'Euler ou de Navier-Stokes
TKE	En anglais <i>Turbulent Kinetic Energy</i> , qui se traduit par <i>Énergie Cinétique Turbulente</i>
g	Unité : gramme
kg	Unité : kilogramme
<i>l</i>	Unité : litre
m	Unité : mètre
μm	Unité : micromètre
N	Unité : newton
s	Unité : seconde

Nombre sans dimension	Description
$Fr = \frac{\mathbb{U}}{\sqrt{g \times \mathbb{D}}}$	Nombre de Froude
$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g \times h_1}}$	Nombre de Froude de l'écoulement avant le passage du ressaut
$Fr_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g \times h_2}}$	Nombre de Froude de l'écoulement après le passage du ressaut
$Fr_B = \frac{V_1 + V_B}{\sqrt{g \times h_1}}$	Nombre de Froude du ressaut
$Re = \frac{\mathbb{U} \times \mathbb{D}}{\nu}$	Nombre de Reynolds
$Sc_t = \frac{\nu_t}{D_t}$	Nombre de Schmidt turbulent
$Z = \frac{w_S}{\kappa u_*}$	Nombre de Rouse
$Re_p = \frac{v \times d}{\nu}$	Nombre de Reynolds particulaire basé sur le diamètre des grains sédimentaires
Symbole Grec	Description
α	Paramètre du modèle d'échelles mixtes utilisé pour modéliser les échelles filtrées par la LES
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	Paramètres utilisés dans la décomposition des trajectoires des grains.
η	Coefficient par lequel les moments bruités sont multipliés
γ	Paramètre contrôlant l'amplitude du bruit appliqué aux moments
κ	Constante de von Karman
$\mu = \rho_f \nu$	Viscosité dynamique du fluide $[M/(LT)]$
$\nu = \frac{\mu}{\rho_f}$	Viscosité cinématique du fluide $[L^2/T]$
ν_t	Viscosité cinématique turbulente $[L^2/T]$
ρ_f	Masse volumique du fluide $[M/L^3]$
ρ_p	Masse volumique des grains sédimentaires $[M/L^3]$
σ_i	Support associé à la particule numérique i en dimension n $[L^n]$
τ_0	Contrainte de cisaillement exercée par le fluide sur les particules sédimentaires $[F/L^2]$

τ_r	Temps de relaxation particulaire $[T]$
ζ	Nombre aléatoire
χ	Rapport de la masse volumique du fluide par celle du grain sédimentaire
Symbole mathématique	Description
δ	Distribution de Dirac : $\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
δ_{ij}	Symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$
$M_{x^m y^n z^o}$	Moment de la distribution de concentration d'ordres m selon x , n selon y et o selon z .
$\vec{\nabla}$	Opérateur différentiel : $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
Δ	Opérateur différentiel : $\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
Symbole Romain	Description
\vec{a}_i	Accélération du grain i $[L/T^2]$
\overline{C}_h	Représentation spatio-temporelle de la concentration normalisée intégrée horizontalement
\overline{C}_v	Représentation spatio-temporelle de la concentration normalisée intégrée verticalement
C	Concentration $[M/L^3]$
C_a	Valeur approchée de la concentration $[M/L^3]$
c_i	Poids associé à une particule numérique
\mathbb{D}	Longueur caractéristique $[L]$
D	Coefficient de diffusion $[L^2/T]$
d_i	Diamètre du grain i $[L]$
d_p	Diamètre des grains sédimentaires $[L]$
g	Accélération de pesanteur $[L/T^2]$
h_1	Hauteur moyenne de l'écoulement avant le passage du front du ressaut $[L]$
h_2	Hauteur moyenne de l'écoulement après le passage du front du ressaut $[L]$

i	Indice de numérotation
K	Conductivité hydraulique d'un milieu poreux [L/T]
m_i	Masse du grain i [M]
r_i	Rayon du grain i [L]
t	Temps [T]
\mathbb{U}	Vitesse caractéristique [L/T]
\vec{u}	Vitesse du fluide [L/T]
\vec{u}_i	Vitesse du fluide à la position du grain i [L/T]
u_*	Vitesse de cisaillement [L/T]
u_y	Vitesse verticale du fluide [L/T]
$\vec{\bar{u}}$	Vecteur vitesse filtré par le noyau de coupure de LES [L/T]
\vec{v}_i	Vitesse du grain i [L/T]
V_1	Vitesse moyenne de l'écoulement après le passage du front du ressaut [L/T]
V_2	Vitesse moyenne de l'écoulement après le passage du front du ressaut [L/T]
V_B	Vitesse de propagation du ressaut [L/T]
W	Noyau de régularisation ou d'interpolation utilisé dans les méthodes particulières
w_S	Vitesse de sédimentation des grains sédimentaires [L/T]
\vec{x}_i	Position du grain i [L]

Introduction

Sommaire

1.1 Le phénomène de Mascaret	17
1.1.1 Définition	18
1.1.2 Mascarets et ressauts hydrauliques	19
1.1.3 Conditions d'apparition	26
1.1.4 Hydro-dynamique	28
1.2 Le transport sédimentaire	29
1.2.1 Nature des sédiments	29
1.2.2 Mécanismes de transport	31
1.2.3 Échelles physiques et modélisation	36

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre du projet **ANR Mascaret** visant l'étude et la compréhension du phénomène de mascaret, ses conséquences sur son environnement ainsi que sa sensibilité aux modifications anthropiques de cet environnement. Cette large étude porte sur deux principaux points : l'analyse des processus hydro-dynamiques instationnaires générés par le passage du mascaret et la caractérisation du transport sédimentaire que ceux-ci induisent. Cette étude nécessite l'utilisation de plusieurs approches qui sont complémentaires : études de laboratoire, études de terrain et modélisations numériques. Ces différentes approches sont réparties entre trois laboratoires :

- Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux (I2M) - Département TREFLE (Transferts Écoulements FLuides Énergétique) : son rôle est de fournir une modélisation numérique de l'écoulement du mascaret sans prendre en compte l'aspect sédimentaire. Cette modélisation sera effectuée à l'aide du code **Thétis**, développé au sein de ce département.
- Institut Pprime, UPR 3346, CNRS-Université de Poitiers-ISAE ENSMA (Institut P') - Axe HydEE (Hydrodynamique, Écoulements Environnementaux) : son rôle est d'effectuer une étude du mascaret en canal artificiel ainsi que l'étude en canal artificiel et la modélisation numérique du transport sédimentaire induit par les mascarets.
- Université de Caen-Basse Normandie - M2C (Morphodynamique Continentale et Côtière) : son rôle est d'étudier les processus hydro-sédimentaires générés par les mascarets en milieu naturel ainsi qu'en canal artificiel.

Ainsi, la plupart des écoulements utilisés au cours de ce travail de thèse sont issus des travaux de l'équipe TREFLE à partir du code *Thétis*. Par ailleurs, les conditions étudiées seront choisies proches de celles étudiées par l'équipe du M2C afin de pouvoir se baser sur leurs résultats tout en les complétant.

L'objectif général de cette thèse est de modéliser le transport sédimentaire induit par le passage d'un mascaret et de quantifier ses effets autant que possible. Pour cela, trois méthodes de modélisation seront présentées et appliquées au cas spécifique du mascaret. Chacune de ces méthodes permettra d'identifier des caractéristiques particulières du transport au sein de cet écoulement. Ces trois méthodes sont dites *lagrangiennes* car un élément de calcul se déplace en même temps que le grain ou le groupe de grain qu'il modélise, contrairement à des méthodes dites *eulériennes* dans lesquelles les éléments de calcul sont fixes.

La première méthode, dite *méthode tracker*, modélise individuellement chaque grain sédimentaire, c'est-à-dire qu'une particule numérique est nécessaire pour chacun des grains modélisés. Cette méthode est très précise mais le temps de calcul est extrêmement élevé et l'analyse des trajectoires des grains générées est difficile du fait du très grand nombre de celles-ci ainsi que de leur aspect individuel. Une seconde méthode est donc considérée afin de réduire le temps de calcul et d'obtenir des données plus commodes à traiter et à interpréter. Celle-ci, appelée *méthode particulière*, modélise l'évolution d'une concentration en grains plutôt que chaque grain individuellement. Ainsi, une particule numérique modélise l'évolution de la concentration en grains dans un volume élémentaire qui est entraîné par l'écoulement. Enfin, une troisième méthode, nommée *méthode des moments*, permet de modéliser un nuage de sédiments ainsi que l'évolution de sa forme et de la distribution en grains à l'intérieur de celui-ci en simulant l'évolution des moments de cette distribution.

Durant toute l'étude, les éventuelles rétroactions des sédiments sur l'écoulement seront toujours considérées comme négligeables, ce qui implique que l'on se place en régime dilué du point de vue de la modélisation des sédiments. Les grains seront par ailleurs considérés comme sphériques et non cohésifs.

Le déroulement de cette thèse sera le suivant :

- les phénomènes étudiés ainsi que les travaux déjà effectués sur ces thématiques sont présentés dans la suite de ce chapitre.
- les trois méthodes de modélisation ainsi que leurs validations et quelques résultats généraux sont ensuite présentés dans les chapitres 2, 3 et 4.
- une proposition de correction des deux dernières méthodes dans le cas où l'écoulement porteur n'est pas à divergence nulle est présentée en chapitre 5.
- l'application de ces méthodes à l'étude des milieux poreux et des mascarets est exposée dans le chapitre 6.

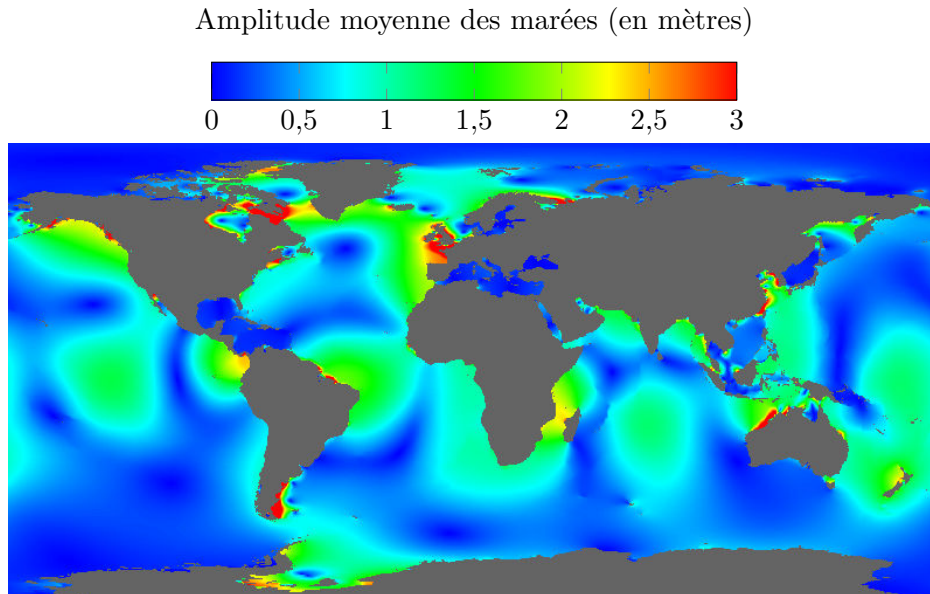


FIGURE 1.1 – Amplitude moyenne des marées dans le monde (FES2004).

1.1 Le phénomène de Mascaret

Le mascaret est un phénomène hydraulique assez rare qui ne peut se produire qu'à l'embouchure de certains fleuves, lorsque la marée est montante. Moins d'une centaine de sites seraient propices à l'apparition de mascarets à travers le monde (Bartsch-Winkler et Lynch, 1988), répartis dans les zones où les amplitudes des marées sont les plus importantes (en rouge sur la figure 1.1). Le nom donné à ce phénomène peut varier d'un pays à l'autre : on parlera par exemple de *Aegir* aux Royaumes-Unis pour le mascaret du fleuve Trent, de *Pororoca* au Brésil, de *Lupar Benak* en Malaisie, de *Silver Dragon* en Chine sur le Qiantang, de *mascaret* ou de *barre* en France ou bien simplement de *tidal bore*¹ dans les pays anglophones pour désigner ce phénomène de manière générique. Ce phénomène peut apparaître sous diverses formes mais on distingue deux formes principales : les mascarets ondulants (figure 1.2) et les mascarets déferlants (figure 1.3). Ils peuvent présenter des dangers importants pour les embarcations, les structures fluviales ainsi que les personnes évoluant à proximité des berges du fait de sa puissance. En effet, il résulte du mouvement d'une large masse d'eau qui peut se déplacer à près de 30 km/h dans certaines situations.

De manière simplifiée, un mascaret se forme lors de la marée montante, lorsque la masse d'eau montant de l'océan est suffisante pour bloquer, voire inverser, le courant du fleuve. Il se forme alors une ou plusieurs vagues qui pourront ou non déferler suivant les paramètres caractérisant le fleuve ainsi que la masse d'eau de l'océan déplacée par la marée. En effet, la formation d'un mascaret est conditionnée

1. *tidal bore* se traduit par *front de marée*



FIGURE 1.2 – Mascaret sur la Gironde, de type ondulant, à Langoiran en France (Jacques Bedex).

par de nombreux paramètres, dont les principaux sont :

- la bathymétrie, qui est la mesure de l'évolution de la profondeur du fleuve à la fois selon sa largeur et selon son cours.
- le coefficient de la marée, qui conditionne la masse d'eau déplacée provenant de l'océan.
- la largeur du fleuve, qui influe sur la capacité du fleuve à absorber la masse d'eau déplacée.
- la vitesse de l'écoulement du fleuve avant l'arrivée du mascaret.

1.1.1 Définition

Dans un premier temps, une définition rigoureuse du terme de mascaret est nécessaire, afin de délimiter notre champ d'étude. **Bremontier (1809)** définissait le mascaret de la manière suivante : *On entend encore par flot, barre ou mascaret, la première lame qui, soit dans la mer, soit dans les fleuves, annonce le retour de chaque marée, aussitôt qu'on peut l'apercevoir, on dit : la marée arrive , il est marée.* La première partie de cette définition est très générale et peut finalement s'appliquer à chaque fois que le flot de la marée pénètre l'embouchure d'un fleuve, même si aucune vague n'est visuellement observable. La seconde partie tente de préciser la nature du phénomène mais introduit un aspect subjectif dans la définition puisque le phénomène est supposé être *visible*. Plus tard, **Comoy (1881)** précise la définition : *le mot mascaret désignera tout ressaut qui se forme en tête du flot de la marée fluviale et y fait une saillie plus ou moins prononcée sur les basses eaux du fleuve, que ce ressaut déferle ou présente des surfaces lisses.* Cette fois, la



FIGURE 1.3 – Mascaret sur le Qiantang, de type déferlant, en Chine (Reuters/Stringer).

définition est plus précise et ne fait pas explicitement appelle à une notion subjective, bien que la notion de *saillie plus ou moins prononcée* reste vague. Aujourd'hui, et particulièrement dans ce travail, la définition utilisée est (Bonneton *et al.*, 2011; Chanson, 2011; Lubin *et al.*, 2010; Mouaze *et al.*, 2010; Wolanski *et al.*, 2004) : *le mascaret est un ressaut hydraulique en translation créé par la marée montante, se propageant à contre courant au sein d'un fleuve et induisant une élévation soudaine de la hauteur d'eau moyenne et éventuellement l'apparition d'un train d'oscillations immédiatement après, appelées éteules.*

1.1.2 Mascarets et ressauts hydrauliques

Ce phénomène peu commun et intrigant n'a été que peu étudié jusqu'ici comparé à d'autres phénomènes qui paraissent similaires, comme les ruptures de barrages par exemple, que l'on regroupe sous la dénomination de *ressauts hydrauliques*. Le mascaret se caractérise par un sens de propagation opposé au courant du fleuve et par le fait que le fluide de la vague est le même que le fluide du fleuve (figure 1.4a), contrairement au cas de la rupture de barrage où la vague est créée par un apport de fluide (figure 1.4b). Ce type d'écoulements a été étudié par plusieurs auteurs du 19^e siècle. Notamment Bazin et Darcy (1865) étudient ce qu'ils appelaient à cette époque les *remous* dans différentes conditions : des remous se propageant sur eau calme, à contre courant ou bien dans le sens du courant. Le cas similaire au mascaret est le cas du remous avançant à contre courant, comme l'ont montré plusieurs auteurs par la suite (Chanson, 1995; Montes et Chanson, 1998; Chanson, 2005). Ils

utilisent déjà à cette époque l'abaissement brutal d'un obstacle dans l'écoulement permettant son arrêt brusque et qui provoque la génération du ressaut hydraulique. Cette méthode est encore largement utilisée aujourd'hui pour générer les mascarets en canaux artificiels (Koch et Chanson, 2008; Chanson, 2010a).

Des comparaisons expérimentales réalisées par plusieurs auteurs (Montes et Chanson, 1998; Chanson, 2005) ont montré que les mascarets étaient proches d'un ressaut hydraulique en translation qui est lui-même très comparable à une rupture de barrage (figure 1.4b) ou bien à la réflexion d'un courant sur une paroi (Stoker, 1957, figure 1.4c). Dans ces deux cas, des solutions analytiques peuvent être obtenues pour diverses grandeurs telles que la vitesse de propagation du ressaut ou bien la hauteur d'eau après son passage (voir section 1.1.4).

Les ressauts hydrauliques sont usuellement divisés en cinq familles distinctes (Lamb, 1932; Peterka, 1957), définies à partir du nombre de Froude Fr_1 , dit *amont* (l'amont et l'aval étant définis par rapport au sens de propagation du ressaut : le ressaut se propageant de l'aval vers l'amont) :

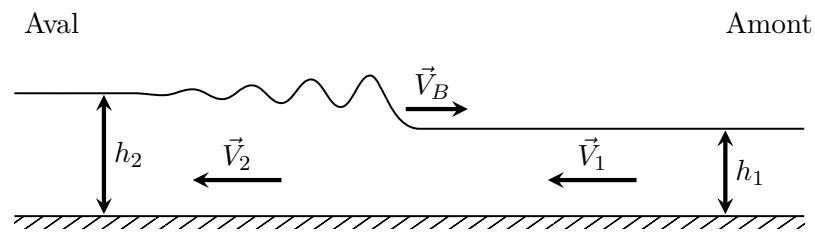
$$\begin{cases} Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g \times h_1}} \\ Fr_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g \times h_2}} \end{cases} \quad (1.1)$$

où h_1 et V_1 sont respectivement la hauteur et la vitesse de l'écoulement en amont du ressaut, h_2 et V_2 sont respectivement la hauteur et la vitesse de l'écoulement en aval du ressaut et g est l'accélération de pesanteur. Ces grandeurs sont définies sur la figure 1.4. Ces cinq familles sont représentées sur la figure 1.5 (Peterka, 1957) et sont définies comme suit :

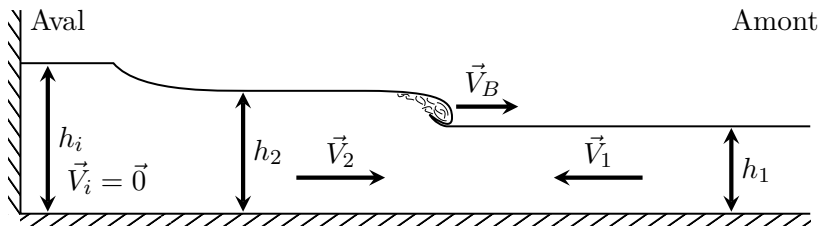
- $1 < Fr \leq 1,7$: ressaut ondulant, pour lequel la différence de hauteur de part et d'autre du ressaut est faible et la surface est ondulée et lisse.
- $1,7 < Fr \leq 2,5$: faible ressaut, pour lequel la surface est peu ondulée et des rouleaux apparaissent proche de la surface au niveau du front.
- $2,5 < Fr \leq 4,5$: ressaut oscillant, pour lequel l'écoulement en dessous des rouleaux de surface se déstabilise et oscille entre le fond et la surface, ce qui crée des oscillations en aval du front.
- $4,5 < Fr \leq 9$: ressaut stable, pour lequel les rouleaux s'intensifient et s'agrandissent tandis que l'écoulement en profondeur est à nouveau stable.
- $9 < Fr$: ressaut puissant, pour lequel des tourbillons peuvent aussi se former au fond.

Les phénomènes de mascarets se situent généralement dans les deux premières classes.

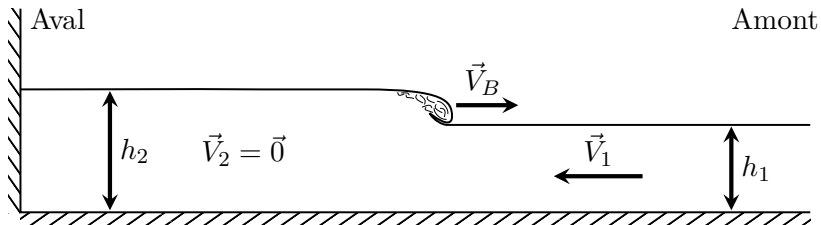
Cependant, cette classification se base sur un nombre de Froude Fr_1 , dit *amont*, défini à partir des hauteur et vitesse en amont du front, représentées sur la figure 1.4a. Ce calcul est adapté à la classification des ressauts hydrauliques stationnaires. Or, le mascaret est défini comme un ressaut hydraulique en translation. Le nombre de Froude utilisé pour classer les mascarets doit donc prendre en compte



(a) Mascaret.



(b) Ressaut hydraulique de type rupture de barrage.



(c) Ressaut hydraulique de type réflexion d'un courant sur une paroi.

FIGURE 1.4 – Schémas des ressauts hydrauliques apparentés au mascaret et définition des grandeurs associées.

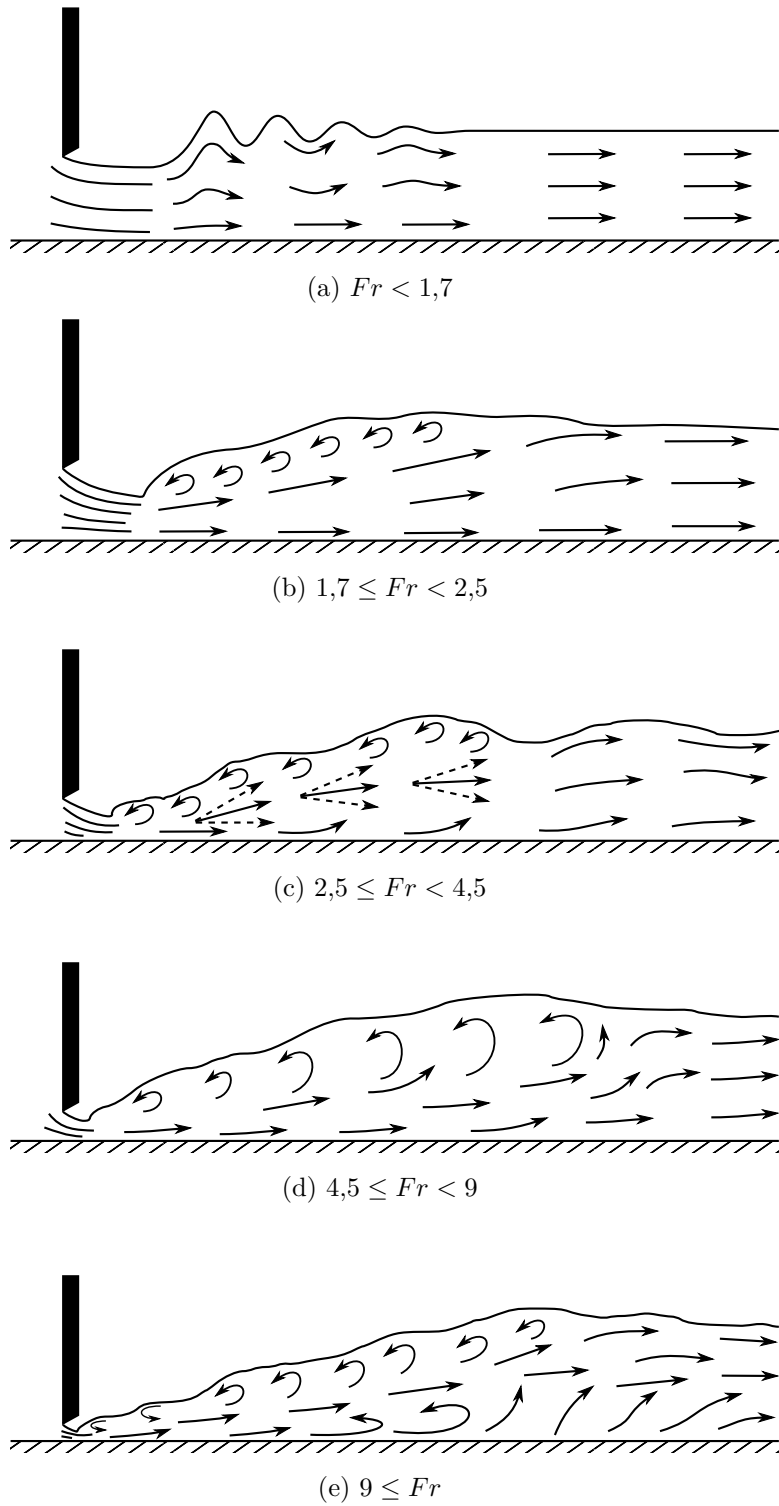
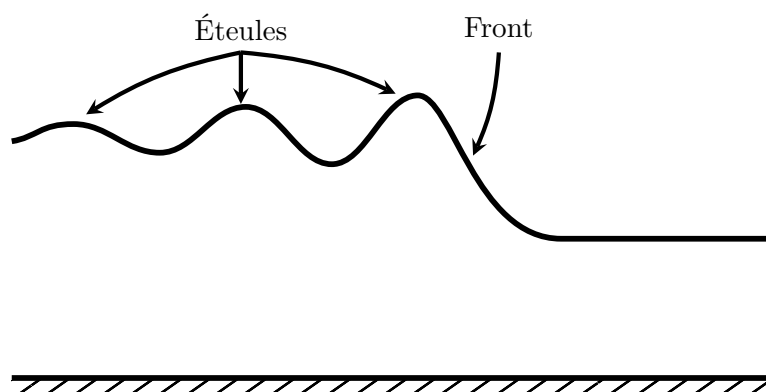
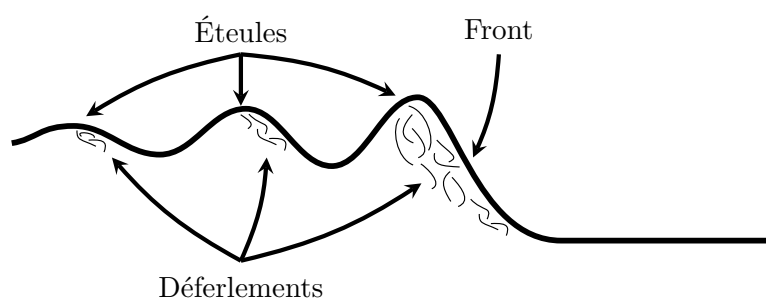


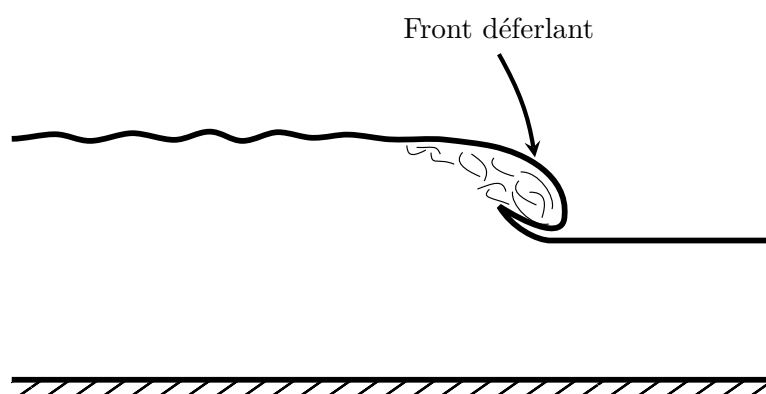
FIGURE 1.5 – Familles de ressauts hydrauliques stationnaires (Peterka, 1957).



(a) Mascaret ondulant.



(b) Mascaret transitoire.



(c) Mascaret déferlant.

FIGURE 1.6 – Schémas de mascarets ondulant, transitoire et déferlant.

la vitesse de translation et devient (Chanson, 2005) :

$$Fr_B = \frac{V_1 + V_B}{\sqrt{g \times h_1}} \quad (1.2)$$

où V_B est la vitesse de propagation du front du mascaret.

Les mascarets peuvent alors être classés en trois catégories suivant leur nombre de Froude :

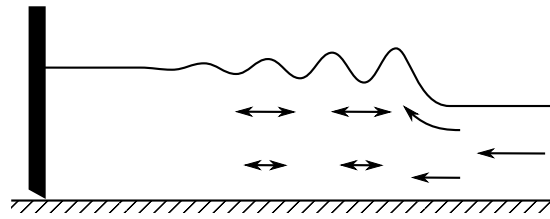
- $Fr \leq 1,3$: les mascarets *ondulants* sans déferlement qui sont composés d'une vague de front et d'une succession d'éteules plus petites (figure 1.6a).
- $1,3 < Fr \leq 1,5$ à $1,6$: les mascarets *transitoires* avec quelques déferlements au niveau du front et de certaines éteules (figure 1.6b).
- $1,6 < Fr$: les mascarets *déferlants* qui ne sont composés que d'une seule vague déferlante au niveau du front (figure 1.6c).

Par ailleurs, Bonneton *et al.* (2012) observe qu'en dessous d'un nombre de Froude critique, estimé à environ 1,1, aucun mascaret n'est observé en milieu naturel et l'élévation du niveau d'eau moyen dans le fleuve se fait de manière beaucoup plus lente sans aucune manifestation visible et dénomme ce processus *ressaut de marée*.

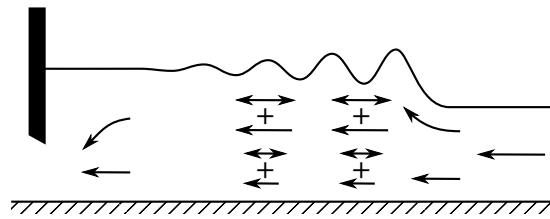
Cependant, malgré les similitudes observées entre le mascaret et ces ressauts hydrauliques particuliers, il est difficile de prouver que la similitude est totale. Notamment, ces modélisations supposent que le niveau moyen du fleuve n'évolue pas après le passage du ressaut hydraulique, ce qui n'est pas le cas en milieu naturel où la marée continue de le faire augmenter. De même, les similitudes ont essentiellement été observées au niveau de la surface libre alors qu'il est tout à fait possible que deux écoulements présentant une surface libre identique, ou du moins dont les différences du points de vue de la surface libre soient difficilement mesurables, soient tout à fait différents au-dessous de celle-ci.

Un premier élément simple permettant cette affirmation est la simple comparaison du mascaret et des deux ressauts auxquels il est souvent assimilés : dans le cas de la rupture de barrage, l'écoulement initial a une vitesse nulle, ce qui n'est pas le cas des deux autres écoulements. Ainsi, une couche limite se développe près du fond et des berges dans les cas du mascaret et de la réflexion d'un courant sur une paroi. Au contraire, le fluide est au repos dans toute la zone précédant l'arrivée du ressaut dans le cas de la rupture de barrage, ce qui ne permet pas le développement d'une couche limite.

Cependant, une autre manière de générer un ressaut en translation proche d'un mascaret consiste à obstruer l'écoulement par un obstacle, comme dans le cas de la réflexion d'un courant sur une paroi, mais en n'obstruant cette fois-ci la section du canal que partiellement. Dans ce cas, la vitesse V_2 ne se retourne pas immédiatement après le passage du ressaut, ce qui semble plus proche du cas naturel, même si un retournement immédiat est parfois observé (Chanson, 2011). De ce fait, une couche limite est présente près du fond à la fois avant et après le passage du front. Il est



(a) Fermeture complète de la porte.



(b) Fermeture partielle de la porte.

FIGURE 1.7 – Schémas des ressauts hydrauliques de type réflexion sur une paroi, générés par la fermeture complète ou partielle d'une porte.

cependant plus difficile d'obtenir une solution analytique et celle-ci dépendra d'un paramètre supplémentaire, le taux d'obstruction, qui est le rapport entre la section obstruée et la section totale du canal. La figure 1.7 présente les deux écoulements générés lorsque la porte est entièrement ou partiellement fermée.

Un second exemple de différence triviale entre un mascaret naturel et les ressauts auxquels il est assimilé concerne la vitesse de l'écoulement juste après le passage du front. Dans le cas du mascaret naturel, la vitesse V_2 de l'écoulement peut se retourner instantanément au passage du front (Wolanski *et al.*, 2004) ou bien seulement après un certain temps variant de quelques secondes à plusieurs minutes (Cebile, 2010). Au contraire, dans le cas de la rupture de barrage, cette vitesse initialement nulle s'oriente immédiatement au passage du front dans le même sens que sa vitesse de propagation. De même, dans le cas de la réflexion d'un courant sur une paroi généré par fermeture complète d'une porte, le courant s'arrête immédiatement au passage du ressaut (Bazin et Darcy, 1865).

Ainsi, il reste à l'heure actuelle difficile d'affirmer que les ressauts générés par une de ces méthodes représentent fidèlement un mascaret naturel. Enfin, aucune expérience de laboratoire ne reproduit actuellement toutes les caractéristiques observées dans les mascarets naturels, ce qui rend difficile de tirer des conclusions précises et définitives.

1.1.3 Conditions d'apparition

Dans cette étude, nous ne nous intéressons qu'aux mascarets provoqués par les marées montantes dont le flot s'engouffre dans l'embouchure d'un fleuve. Il est cependant possible d'observer des mascarets dans d'autres conditions. Habituellement, les mascarets créés en laboratoire sont générés dans des canaux à l'aide d'une porte qui se ferme très rapidement, souvent partiellement. Le courant est alors bloqué de manière soudaine, la profondeur du canal augmente au niveau de la porte et une vague se propageant en sens opposé au courant se crée. Un exemple naturel de formation d'un mascaret par ce procédé aurait été observé sur le fleuve Mississippi, aux États-Unis, lors d'un très important tremblement de terre le 7 février 1812. Ce tremblement de terre aurait soudainement modifié le lit du fleuve, ce qui aurait créé l'équivalent d'une porte naturelle bloquant en partie le cours du fleuve, créant ainsi une vague remontant le courant. Ce type de phénomène est cependant extrêmement rare et la majeure partie des mascarets observés en milieux naturels sont causés par les marées.

Pour qu'une marée entraîne la formation d'un mascaret, de nombreux critères doivent être satisfaits. La majeure partie de ces critères étaient déjà compris au 19^e siècle, grâce aux études de [Bremontier \(1809\)](#) et [Comoy \(1881\)](#). [Bremontier](#) relève que la formation d'un mascaret est conditionnée par six facteurs, cités ici textuellement :

- *de l'élévation des marées sur la cote à l'embouchure du fleuve.*
- *de la largeur de cette embouchure.*
- *de la diminution successive de cette largeur.*
- *de la régularité des pentes, du peu de vitesse des eaux extérieures à marée basse, depuis la mer jusqu'au point où il doit arriver.*
- *d'une distance convenable entre ces deux intervalles.*
- *Enfin toutes les fois que les courants du descendant deviennent trop rapides par les crues, non-seulement ce phénomène cesse, mais les courants, même du montant, ne s'établissent plus ; seulement, la vitesse des courants du descendant perd de son activité.*

Il remarque aussi l'impact de l'évolution du lit de la Garonne qui avait nettement atténué le phénomène de mascaret en environ 30 ans, du fait d'atterrissements successifs, au point que celui-ci était devenu difficilement visible. Il remarquait aussi l'effet du vent sur sa vitesse de propagation et qu'il était nettement plus visible à proximité des berges du fleuve par rapport au milieu du fleuve. Par ailleurs, [Bremontier](#) explique la formation du mascaret de la manière suivante : *des lames fines de fluides se succèdent, chacune venant se superposer à la précédente. Ainsi, comme chaque lame a moins de difficulté à remonter le courant du fleuve que la lame précédente, chacune finit par rattraper la précédente et lorsque suffisamment de lames se sont rejointes, le mascaret se forme.* [Bazin et Darcy \(1865\)](#) reprendront une explication similaire mais ne parleront plus de *lames fines* mais d'*ondes élémentaires*. Dès cette époque, les mascarets qu'ils étudient dans des canaux artificiels sont générés

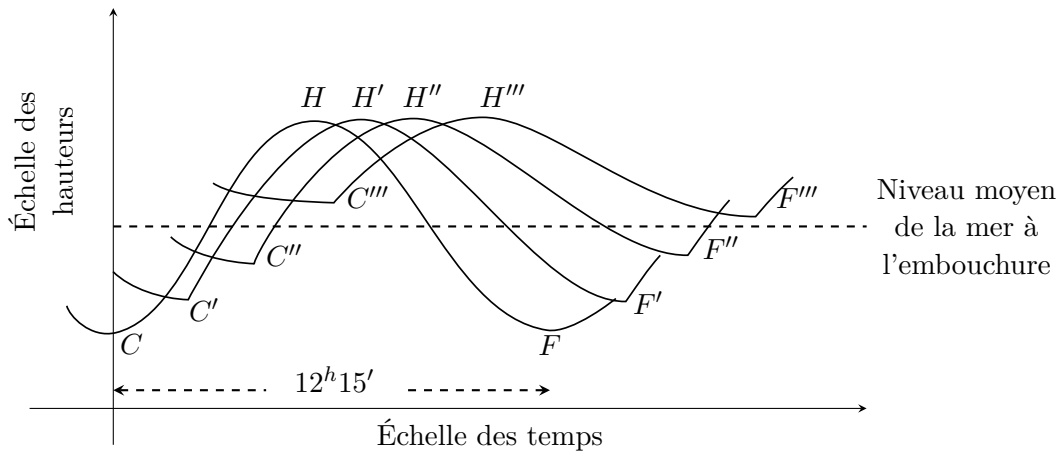


FIGURE 1.8 – Asymétrie des marées fluviales en quatre positions : proche de l'embouchure (courbe CHF) et de plus en plus en amont de celle-ci (courbes $C'H'F'$, $C''H''F''$ et $C'''H'''F'''$ respectivement). Cette figure est une copie de la figure 23 de Comoy (1881).

par l'obstruction soudaine du courant par une vanne ou une porte, ce qui est encore aujourd'hui le principal mode de génération des mascarets artificiels (Chanson, 2001). Ils remarquent enfin que la présence de hauts fonds à l'embouchure du fleuve favorisent nettement l'apparition des mascarets. Plus tard, Comoy (1881) s'intéresse d'abord aux phénomènes des marées pour ensuite aborder la transition entre l'onde de marée au niveau de l'océan et l'onde de type mascaret qui se développe dans le fleuve. Il ajoute un paramètre important qui est l'asymétrie des marées fluviales. En effet, si la marée est sinusoïdale à l'embouchure, sa transmission au sein du fleuve peut nettement modifier sa forme (figure 1.8). Il observe que ce paramètre est très important pour la formation d'un mascaret et définit un critère simple permettant de définir si la formation d'un mascaret est possible ou non en se basant sur la relation suivante :

$$S \times v \times t = D \times L \times A \quad (1.3)$$

où l'auteur définit les grandeurs de la manière suivante : t est le temps que l'on considère, et pendant lequel la marée s'élève à l'embouchure d'une hauteur C ; v est la vitesse moyenne du courant de flot², à l'embouchure, pendant le temps t ; S est la surface moyenne de la section mouillée de l'embouchure pendant le temps t ; D la distance moyenne qui, pendant le temps t , sépare l'embouchure de l'étales³ de jusant⁴ ; L la largeur moyenne du lit du fleuve sur la distance D ; A l'augmentation de la hauteur moyenne du flot pendant le temps t ; autrement dit, la distance

2. Flot : courant créé par la marée montante.

3. Étales : période entre une marée montante et une marée descendante durant laquelle le courant est nul.

4. Jusant : courant créé par la marée descendante.

moyenne qui sépare les deux positions de la surface supérieure du flot à l'origine et à la fin du temps t . Un mascaret n'étant possible que si $A > C$.

Destriau (1951) tente ensuite d'expliquer pourquoi le mascaret a tendance à être plus important le lendemain, voire le sur-lendemain, de la marée dont le coefficient a été le plus fort. Il montre que le retard des marées joue un rôle dans l'apparition des mascaret et qu'une baisse du coefficient de marée peut être compensée par un important retard de marée. Il étudie aussi la vitesse de propagation des mascarets de part et d'autre d'une île et remarque que celle-ci n'est pas égale des deux côtés, il en résulte que le premier à atteindre le bout de l'île se met se propager de l'autre côté de cette île, dans le sens du courant, jusqu'à ce que les deux ondes se rencontrent et se percutent violemment.

Plus tard, Mazumder et Bose (1995) définissent un critère plus complexe basé sur l'étude théorique de la propagation d'une onde de marée dans un canal lisse et infini. Ce critère est cependant très proche conceptuellement de celui introduit par Comoy mais utilise des angles au lieu de volumes.

Des critères concernant l'amplitude minimale de la marée permettant la formation d'un mascaret ont été proposés (Chanson, 2005; Bonneton *et al.*, 2011) mais ne semble pas pertinent de manière générale, c'est à dire que l'amplitude minimale dépend du fleuve considéré. Ce type de critère n'est donc pas retenu, d'autant qu'il est contenu implicitement dans les critères proposés par Comoy et Mazumder et Bose.

1.1.4 Hydro-dynamique

Les premiers éléments théoriques importants concernant les ressauts hydrauliques de manière générale ont été développés par de Saint-Venant (Séance du 17 Juillet 1871). Pour mettre en place ses équations, il s'est basé sur la conservation de plusieurs quantités telles que la masse, le débit et la quantité de mouvement du fluide en supposant que la pression dans le fluide suit une loi hydrostatique. À partir de ces équations, il est possible de déterminer la vitesse de propagation du front ainsi que la hauteur moyenne de l'écoulement après le passage du ressaut :

$$\begin{cases} \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \times \frac{(V_B + V_2)^2}{gh_1}} - 1 \right) \\ V_B = V_2 + \sqrt{g \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) \frac{h_1}{h_2}} \end{cases} \quad (1.4)$$

Ces équations donnent une bonne approximation des hauteur et vitesse de propagation des ressauts hydrauliques ondulants sauf lorsque leur hauteur devient faible. Peu de temps après, Boussinesq (1872) ajoute un terme dispersif à ces équations afin d'augmenter leur précision et qui fut reprise par Korteweg et de Vries (1895) pour former l'équation éponyme.

Concernant les ressauts hydrauliques auxquels les mascarets sont comparés, plusieurs auteurs ont tenté de donner des solutions analytiques permettant de détermi-

ner leur évolution dans différentes conditions (Ritter, 1892; Whitham, 1955; Stoker, 1957). Les solutions les plus appropriées pour une comparaison avec un mascaret sont celles définies par Stoker (1957) car elles prennent en compte la présence de fluide avant l'arrivée du ressaut alors que les précédentes étudiaient l'évolution du ressaut sur un fond sec. Ainsi, dans le cas où le mascaret est assimilé à une rupture de barrage, les solutions sont :

$$\begin{cases} h_2 = \frac{(h_2 - h_1)^2 (h_2 + h_1)}{8h_1 (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})^2} \\ V_B = \frac{h_2 V_2}{h_2 - h_1} \end{cases} \quad (1.5)$$

où $V_2 = 2 (\sqrt{gh_1} - \sqrt{gh_2})$. Ces termes sont représentés sur la figure 1.4b.

De même, dans le cas où le mascaret est assimilé à la réflexion d'un courant sur une paroi, les solutions sont :

$$\begin{cases} h_2 = h_1 \frac{V_B - V_1}{V_B} \\ -V_B (V_1 - V_B) = g \frac{h_1}{2} \left(1 - \frac{V_1 - V_B}{V_B} \right) \end{cases} \quad (1.6)$$

Les termes apparaissant dans ces équations sont représentés sur la figure 1.4c.

Ces solutions sont cependant limitées par des hypothèses fortes lorsque la pression est supposée hydrostatique ou bien lorsque la couche limite est négligée. Par ailleurs, elles ne représentent pas le développement de la turbulence lors du passage du ressaut et ses effets. En effet, plusieurs auteurs observent une très forte augmentation de la TKE⁵ et des contraintes de Reynolds turbulentes lors du passage d'un mascaret (Simpson *et al.*, 2004; Koch et Chanson, 2008; Chanson, 2010b; Mouaze *et al.*, 2010; Simon, 2013; Furgerot, 2014).

L'augmentation de la turbulence provoquée par un mascaret est très importante dans cette étude puisqu'elle joue un rôle considérable dans le processus de transport sédimentaire comme l'ont montré Chen *et al.* (1990); Yeh et Mok (1990); Tessier et Terwindt (1994) et Chanson (2005). Notamment, cette turbulence provoque dans un premier temps l'érosion du fond puis, dans un second temps, favorise la dispersion des sédiments dans la colonne d'eau.

1.2 Le transport sédimentaire

1.2.1 Nature des sédiments

Le transport sédimentaire est un domaine très large regroupant de nombreux aspects, tant théoriques qu'expérimentaux. La compréhension de ce phénomène est très importante lors de la construction de barrages, canaux, ponts ou tout ouvrage

5. TKE : *Turbulent Kinetic Energy* qui se traduit par *énergie cinétique turbulente*.

Noms français	Noms anglais	Tailles (mm)	Types
Blocs	Boulders	≥ 256	Sédiments grossiers
Pavés	Cobbles	64 - 255	
Graviers	Gravels	32 - 64	
Galets	Pebbles	4 - 32	
Granules	Granules	2 - 4	
Sable	très grossier	1 - 2	
	grossier	0.5 - 1	Sédiments fins
	moyen	0.25 - 0.5	
	fin	0.125 - 0.25	
	très fin	0.0625 - 0.125	
Limon	grossier	0.0312 - 0.0625	
	moyen	0.0156 - 0.0312	
	fin	0.0078 - 0.0156	
	très fin	0.00390625 - 0.0078	
Argile	Clay	0.0001 - 0.00390625	
Colloïdes	Colloids	≤ 0.0001	

TABLE 1.1 – Classification de [Wentworth \(1922\)](#).

en contact ou très proche d'eau courante. De nombreux exemples de barrages dont le réservoir s'est entièrement rempli de sédiments ou bien de ponts qui se sont écroulés à cause de l'érosion ont été recensés par [Chanson \(2004\)](#). Ces exemples montrent à quel point la négligence vis-à-vis de ce phénomène peut être coûteuse. Dans ce contexte, de nombreuses études ont été menées afin de pouvoir prévoir l'évolution de l'envasement ou de l'érosion au niveau de ces ouvrages.

Les sédiments sont définis comme des particules de formes, de tailles et de constitutions très variées. Ils sont le plus souvent d'origine rocheuse mais peuvent aussi être d'origine biologique ou humaine (particules plastiques notamment). Leurs tailles vont des colloïdes dont le diamètre est inférieur à 10^{-7} m aux blocs de plusieurs dizaines de centimètres. Une des classifications les plus utilisées est celle de [Wentworth \(1922\)](#), qui a été complétée par la classification de *Gradistat* de [Blott et Pye \(2001\)](#), dont un résumé est donné en tableau 1.1. Des photos de sédiments de quelques classes sont présentées en figure 1.9.

Cette classification est importante lorsque l'on parle de transport sédimentaire puisque ce phénomène de transport est directement lié au poids et à la taille des particules. Ainsi, les *sédiments fins* sont les plus facilement transportables et sont donc les principaux responsables de l'envasement des estuaires ou des canaux.

Par ailleurs, la constitution des sédiments a un rôle très important et donne lieu à une distinction entre deux types : les sédiments *cohésifs* et les sédiments *non-cohésifs*. Les particules constituant les sédiments cohésifs ont tendance à s'agréger en blocs, appelés *flocs* ou *agréats*, dont la taille dépend principalement de la com-

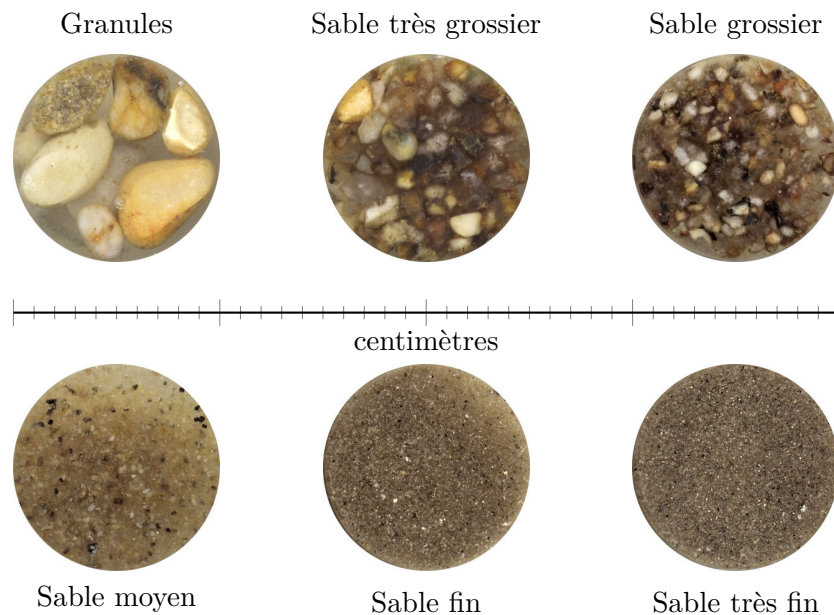


FIGURE 1.9 – Photographies d’échantillons de sédiments de différentes classes allant des granules au sable très fin.

position des sédiments, de l’énergie turbulente de l’écoulement et des propriétés physico-chimiques du milieu (pH, salinité, etc.). La capacité cohésive des sédiments est essentiellement due à la présence d’argiles et de matières organiques. Elle peut avoir une forte influence sur le transport sédimentaire (Jain et Kothyari, 2009). Au contraire, les particules constituant les sédiments non-cohésifs évoluent toutes de manière indépendante et ne peuvent interagir que via des chocs. Les chocs et les mécanismes de cohésion ne sont pas étudiés au cours de cette thèse et tous les sédiments sont considérés comme non-cohésifs.

1.2.2 Mécanismes de transport

Le transport de ces sédiments peut être divisé en trois catégories (figure 1.10) :

- le charriage, qui consiste au roulement et au glissement d’une particule sédimentaire sur le fond. Généralement, les sédiments de type bloc et gros cailloux ne peuvent être transportés que par charriage, à moins d’être en présence de courants très puissants.
- la saltation, où une particule de sédiment est arrachée du fond par le fluide et suit ensuite une trajectoire quasi-balistique pour à nouveau se déposer un peu plus loin sur le fond.
- le transport en suspension, au cours duquel une particule de sédiment reste de manière prolongée dans le fluide, entraînée par celui-ci. Ce mode de transport s’applique principalement aux sédiments fins.

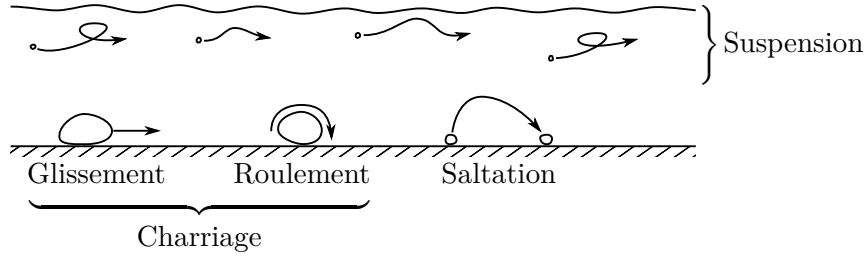


FIGURE 1.10 – Modes de transport des grains sédimentaires.

Le charriage et la saltation constituent la charge de fond (*bedload* en anglais) tandis que le transport en suspension constitue la charge en suspension (*suspended load* en anglais). Le travail présenté ici ne se focalise que sur le transport en suspension, et donc aux sédiments de tailles faibles vis-à-vis de l'intensité de l'écoulement.

Enfin, plusieurs mécanismes physiques interviennent lors du transport en suspension. Au niveau des parois, les sédiments peuvent soit se déposer, soit s'arracher. On parle respectivement de dépôt et d'érosion. Ces mécanismes dépendent principalement de la vitesse de l'écoulement et de la taille des particules ainsi que de leur densité. Les premiers travaux importants au sujet de l'érosion remontent aux années 1930 avec les études de [Hjulström \(1935\)](#) et [Shields \(1936\)](#). Synthétiquement, les travaux de [Hjulström](#) peuvent être résumés par le diagramme éponyme qui permet de déterminer s'il y aura érosion, transport ou sédimentation. On remarque que les boues sont plus difficilement érodables à cause des forces de cohésion entre les particules, malgré une petite taille de grains. Ce diagramme est issu de données expérimentales pour une profondeur d'eau de un mètre. Celui-ci a été complété par [Sundborg \(1956\)](#) puis par [Postma \(1967\)](#) afin de prendre en compte différents niveaux de cohésion, la profondeur ainsi que les effets de consolidation du lit du cours d'eau (figure 1.11). Les travaux de [Shields](#) permettent une caractérisation plus générale de l'érosion en introduisant le nombre adimensionnel de [Shields](#) associé aux particules sédimentaires :

$$\theta = \frac{\tau_0}{(\rho_p - \rho_f) g d_p} \quad (1.7)$$

où τ_0 est la contrainte de cisaillement exercée par le fluide sur les particules sédimentaires, d_p est le diamètre du grain considéré et ρ_p et ρ_f sont respectivement les masses volumiques du grain et du fluide. Ce nombre de [Shields](#) (ou critère de [Shields](#)) permet alors de connaître la vitesse critique de l'écoulement à partir de laquelle une particule peut se mettre en mouvement. Cependant, ces travaux doivent être utilisés avec précaution du fait de certaines descriptions vagues voire incomplètes ([Buffington, 1999](#)). [Shields](#) n'explique par exemple pas comment la contrainte

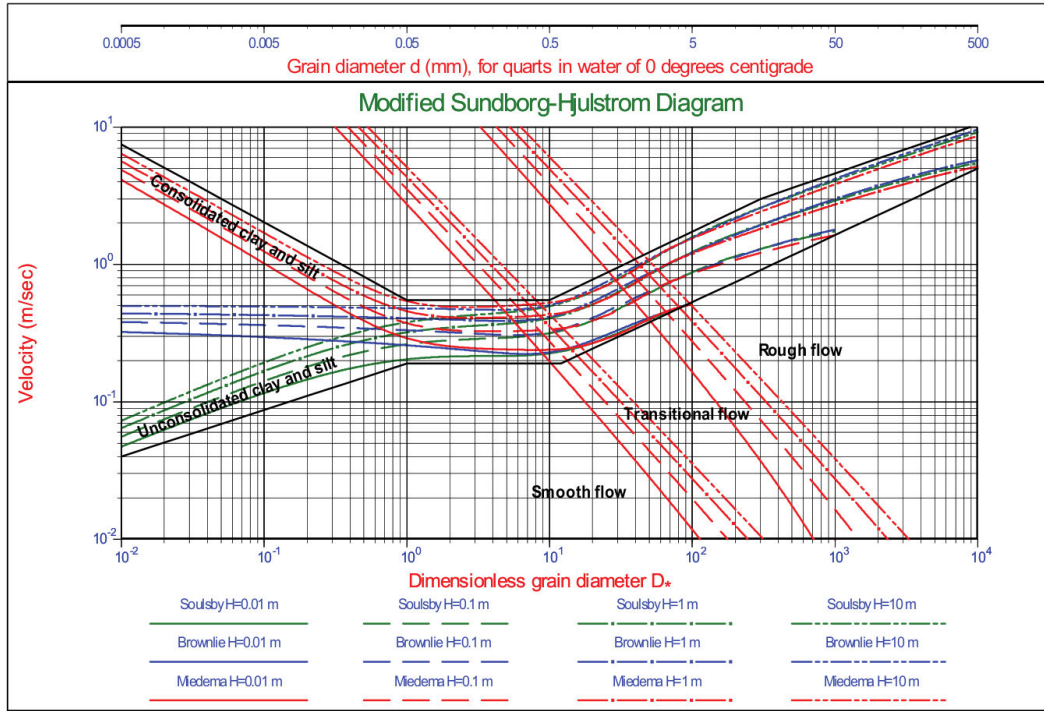


FIGURE 1.11 – Diagramme modifié de Sundborg-Hjulström (Miedema, 2010).

τ_0 a été extrapolée à partir de ses données expérimentales, qui étaient du reste très dispersées. Par ailleurs, ces particules sont considérées comme sphériques, ce qui n'est pas toujours pertinent dans le cas des sédiments, et il est donc difficile de définir ce paramètre de Shields en milieu naturel. Aussi, ce nombre est défini à partir de valeurs moyennées et n'est donc pas toujours pertinent pour une modélisation résolue en temps et n'est pertinent que lorsque tous les grains ont le même diamètre ce qui, là encore, est rarement le cas en pratique. C'est pourquoi, malgré plusieurs travaux venant compléter l'étude de Shields (résumés par Buffington et Montgomery, 1997; Paphitis, 2001), le diagramme de Hjulström est encore souvent utilisé aujourd'hui. Enfin, une fois qu'une particule est en suspension dans le fluide, rien ne dit qu'elle ne va pas retomber au fond très rapidement, ce qui limiterait fortement la quantité de particules transportées par ce mode. Pour quantifier cet effet, on utilise habituellement un critère simple qui est défini comme le rapport de la vitesse de chute d'une particule dans le fluide au repos (w_S) et de la vitesse verticale de l'écoulement (u_y). La valeur de ce critère varie selon les auteurs de 0,2 à 2,5 à cause de définitions et de configurations différentes (Chanson, 2004). Un autre critère, proche du précédent, est le nombre de Rouse (Z), défini comme le rapport entre la vitesse de chute et le produit de la constante de von Karman (κ) par la vitesse de cisaillement u_* : $Z = \frac{w_S}{\kappa u_*}$. Pour que le transport en suspension soit possible, ce nombre de Rouse doit être compris entre 0,8 et 2,5.

Au niveau de la suspension elle-même, le principal phénomène à l'origine du mouvement des particules est l'advection, c'est-à-dire que les particules suivent les lignes de courant du fluide dans lequel elles sont transportées. L'advection néglige tout phénomène de masse des particules, notamment l'inertie. De nombreux autres effets interviennent lors du transport en suspension mais les plus importants sont les effets de masse (inertiels et gravitaires) et les effets diffusifs dus aux interactions entre les particules. Bien évidemment, l'intensité de la turbulence a aussi un fort impact sur le transport en suspension puisqu'elle en est le moteur (Sutherland, 1967; Chanson et Tan, 2010). En effet, ce sont les fluctuations de vitesses verticales dues à la turbulence qui permettent de contrer les forces verticales (gravité et poussée d'Archimède essentiellement) et ainsi permettre aux particules sédimentaires de rester en suspension. D'un point de vue théorique, il ne peut pas y avoir de transport en suspension pérenne si l'écoulement n'est pas turbulent à moins que la masse volumique des particules soit rigoureusement égale à celle du fluide. Dans le cas contraire, les particules se déposent sur le fond ou bien migrent en surface si celles-ci sont moins denses que le fluide. En pratique cependant, le temps de sédimentation des particules peut être long devant les échelles caractéristiques de l'écoulement, le transport peut donc exister dans une zone laminaire si celle-ci est précédée d'une zone turbulente dans laquelle les sédiments ont pu être arrachés du fond ou bien si les sédiments sont introduits dans le fluide par un mécanisme autre que l'érosion (injection d'une solution chargée en sédiments par exemple).

Dans le cadre de cette étude, les sédiments considérés seront aussi proches que possible de ceux que l'on trouve dans la baie du Mont Saint-Michel, notamment la *tangue* (figure 1.12). En effet, ce type de sédiments est majoritaire sur le site de mesure qui a été choisi dans le cadre du projet Mascaret (Furgerot, 2014). La tangue est un matériau composé de débris de coquillages et de minéraux. Les propriétés de ce sédiment ont été étudiées par Migniot (1997). Il s'agit d'un matériau peu cohésif, dont le diamètre moyen des grains varie entre 30 μm et 90 μm et dont la vitesse de sédimentation dans l'eau de mer est évaluée à 0,15 mm/s mais pouvant sensiblement varier d'un grain à un autre, du fait des formes et des tailles des grains très hétérogènes. Cette variation de vitesse de sédimentation se traduit par un litage des dépôts, c'est à dire qu'une ségrégation des grains selon leurs diamètres est observée sur les dépôts. Sur le site de mesures du projet Mascaret, le diamètre moyen des grains est de 70 μm et la courbe granulométrique complète est donnée en figure 1.13.

Dans la suite, les sédiments étudiés ont été simplifiés du fait de la grande difficulté de représenter des grains sédimentaires de formes et de tailles aussi variées. Ainsi, les grains seront toujours considérés comme sphériques et non cohésifs. Par ailleurs, les rétroactions des grains sur la dynamique de l'écoulement ainsi que les interactions entre les grains seront négligées, ce qui implique que l'on se placera toujours dans le cadre d'un régime dilué.



FIGURE 1.12 – Coupe de dépôts successifs de tangue sur une berge du fleuve Sée se jetant dans la baie du Mont Saint-Michel.

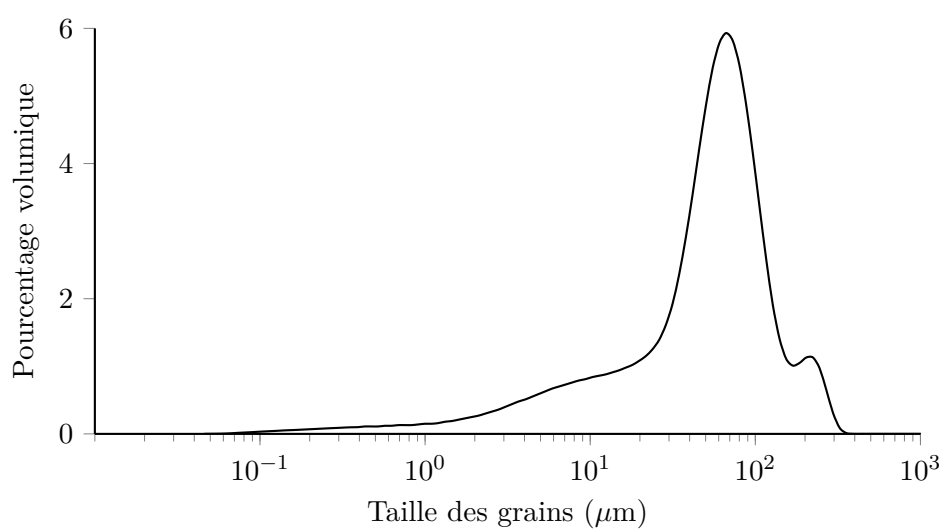


FIGURE 1.13 – Courbe granulométrique d'un échantillon issue du site de mesure du projet Mascaret dans la baie du Mont Saint-Michel (Furgerot, 2014).

1.2.3 Échelles physiques et modélisation

Le système que l'on souhaite étudier est appelé *suspension colloïdale* et désigne un ensemble de corps dont la taille est de l'ordre du micromètre qui évoluent en suspension dans un fluide. L'échelle de description la plus fine du point de vue de la mécanique classique, dite échelle *microscopique*, serait de résoudre l'évolution de chacun de ces corps, c'est-à-dire l'évolution de leurs positions et de leurs vitesses, soit six variables par grains sédimentaires. Par ailleurs, les molécules constituant le fluide seraient elles aussi chacune représentée par six variables pour résoudre leurs positions et leurs vitesses. L'évolution de ces variables obéirait alors aux équations de Hamilton. La précision d'un tel calcul permettrait d'obtenir toutes les propriétés désirées du transport sédimentaire (Allen et Tildesley, 1989). Cependant, le système d'équations obtenu est théoriquement résoluble mais le nombre de variables serait pharamineux et ne permettrait une résolution par ce biais que pour un système extrêmement petit et donc peu intéressant dans le cadre de ce travail. Aussi, il convient de représenter le système à des échelles spatiales et temporelles beaucoup plus grandes que l'échelle microscopique. À l'opposé de l'échelle microscopique se trouve l'échelle *macroscopique* qui est la plus large échelle de représentation du système. Cette fois-ci, le système est uniquement décrit par des grandeurs globales sur l'ensemble de celui-ci, comme par exemple la température, la masse, le volume et l'énergie totale. Là encore, cette échelle n'est pas pertinente du point de vue des objectifs de ce travail et n'est donc pas considérée.

De multiples échelles de description comprises entre les échelles microscopique et macroscopiques sont possibles et sont alors appelées échelles *mésoscopiques*. Ces échelles sont obtenues en représentant des fluctuations petites en temps et en espaces par des termes évoluant plus lentement qui résultent de l'élimination de degrés de liberté du système. La procédure résultant en l'élimination de ces degrés de liberté est appelée *coarse-graining*, que l'on pourrait traduire par méthode à grains grossiers. Souvent, ces termes interviennent sous forme de variables markoviennes, c'est à dire que leur état futur ne dépend que de leur état présent. Ceci n'est cependant possible que lorsque les échelles temporelles représentées par ces variables sont nettement différentes de celles des degrés de liberté qui ont été éliminés. Si ce n'est pas le cas, les nouveaux termes apparaissent sous forme intégral-différentielle, ce qui les rend beaucoup plus difficile à résoudre. Dans le cas d'un système de colloïdes en suspension dans un fluide, les différentes échelles mésoscopiques possibles pour représenter son état sont les échelles dites *hydrodynamique*, de *Fokker-Planck*, de *Smoluchowski* et de *Fick*.

L'échelle hydrodynamique consiste à considérer que les fluctuations de positions et de vitesses des molécules constituant le fluide varient à une échelle de temps très courte mais que leur mouvement global, du fait de leurs multiples interactions, évolue à une échelle de temps beaucoup plus longue. Ainsi, le fluide peut être représenté par des variables continues représentant sa masse volumique locale, c'est à dire le nombre de molécules présentes dans un petit volume de contrôle, sa quantité de

mouvement locale ainsi que son énergie locale qui seront les sommes des quantités de mouvement et des énergies des molécules présentes dans ce même volume de contrôle. Cette représentation est gouvernée par les équations hydrodynamiques associées à chacune des trois variables pour le fluide et aux équations de Newton pour les corps en suspension (de Groot et Mazur, 1962). C'est cette représentation qui est choisie pour la première méthode employée dans cette étude : la méthode tracker. En effet, cette représentation est utilisée pour les mesures ponctuelles effectuées par exemple avec un ADV ou bien pour les mesures de suivi de grains en laboratoire par des mesures PTV, ce qui permet une comparaison directe des résultats.

L'échelle de Fokker-Planck considère que la propagation des forces hydrodynamiques est très rapide par rapport au mouvement des corps solides. La description du système se réduit ainsi à l'étude de l'évolution de la probabilité de trouver un grain donné dans un état donné, où un état est représenté par la position du centre du grain et sa vitesse. L'évolution de cette probabilité obéit à une équation de Fokker-Planck (Murphy et Aguirre, 1972). L'échelle de Smoluchowski suppose que l'évolution des vitesses des grains est beaucoup plus rapide que l'évolution de leurs positions. Il est donc possible de ne représenter le système qu'à l'aide de probabilités que les grains aient des positions données. Là encore, l'évolution de ces probabilités obéit à une équation de Fokker-Planck (Murphy et Aguirre, 1972). Notons que pour les deux dernières échelles, les équations de Fokker-Planck peuvent être remplacées par des équations de Langevin puisque les équations de Fokker-Planck et de Langevin représentent un système de manière différente mais s'avèrent équivalentes.

La dernière échelle considérée ici est l'échelle de Fick. Cette description abandonne la représentation des grains individuels pour ne s'intéresser qu'au nombre de grains présents dans une région donnée. La variable d'intérêt devient donc la concentration, ce qui suppose que l'évolution de celle-ci est lente par rapport à l'évolution des positions des grains. Dans ce cas, l'évolution de la variable d'intérêt, la concentration, est déterminée par l'équation d'advection-diffusion. C'est cette représentation qui sera choisie pour la méthode particulaire et la méthode des moments. Cette représentation est intéressante à étudier car elle correspond aux mesures à grande échelles effectuées en milieu naturel à l'aide de prélèvements ou bien par l'utilisation d'appareils de mesure tels que les OBS qui permettent de mesurer la concentration de matières en suspension dans l'écoulement.

Méthode tracker

Sommaire

2.1	Introduction	39
2.2	Forces appliquées au grain	41
2.2.1	Pesanteur et flottabilité	41
2.2.2	Masse ajoutée	41
2.2.3	Traînée visqueuse	42
2.2.4	Force d'histoire	43
2.3	Extensions de l'équation de Maxey et Riley	43
2.4	Méthodes numériques	47
2.4.1	Trajectoires des grains	48
2.4.2	Turbulence dans le fluide	48
2.4.3	Particules et turbulence	50
2.5	Validation	50
2.5.1	Vitesse de sédimentation	51
2.5.2	Solution analytique en champ oscillant	52
2.6	Études préliminaires	53
2.6.1	Sédimentation	53
2.6.2	Écoulement turbulent	55
2.7	Conclusion	60

2.1 Introduction

La première échelle étudiée est appelée *échelle hydrodynamique* car elle consiste à s'approcher au plus près des grains de matière en suspension et à modéliser leur trajectoires individuellement mais en considérant que le fluide est une phase continue et non pas un ensemble de molécules. Dans un premier temps, les forces agissant sur un grain sédimentaire seront décrites. À partir de ces forces, l'équation de [Maxey et Riley \(1983\)](#) est écrite. Cette équation permet de simuler la trajectoire d'une particule sphérique dans un écoulement. Dans un second temps, une résolution numérique de cette équation dite *méthode tracker* est présentée ainsi que sa validation. Cette validation consistera à comparer l'évolution de la vitesse d'un grain sédimentaire par rapport aux solutions analytiques de cas simples. Enfin, la méthode tracker sera exploitée en utilisant des écoulements fournis par l'équipe du

laboratoire TREFLE générés à partir du code Thétis afin d'évaluer l'impact de chaque terme de l'équation de [Maxey et Riley](#).

Les grains sédimentaires n'ont aucune rétroaction sur le fluide et n'interagissent pas entre eux. Mathématiquement, ce problème s'écrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{v}_i(\vec{x}, t) \\ m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où m_i , \vec{x}_i et \vec{v}_i sont respectivement les masse, position et vitesse du grain i . \vec{F}_i est une force appliquée à ce même grain.

Les premières tentatives pour résoudre ce type de problèmes datent du début du 18^e siècle. À cette époque, de nombreux travaux se focalisaient sur un système plus simple : le pendule, constitué d'une masse sphérique se balançant dans l'air. Les travaux précoces de [du Buat-Nançay \(1786\)](#) ont montré que la modélisation du mouvement d'un pendule sphérique dans l'air doit considérer le déplacement par le pendule des molécules d'air environnant. De même, [Bessel \(1826\)](#) effectua des travaux similaires un peu plus tard sans avoir connaissance des travaux de [du Buat-Nançay](#). À partir des résultats de [Bessel, Poisson \(1831\)](#), ignorant lui aussi les travaux de [du Buat-Nançay](#), développe le concept qui est aujourd'hui connu sous le nom de *masse ajoutée*. Plus tard, [Stokes \(1845\)](#) introduit le concept de *traînée visqueuse* et donne l'expression analytique pour une sphère rigide dans un écoulement à très faible nombre de Reynolds. À la fin du 19^e siècle, [Boussinesq \(1885a et 1885b\)](#) présente la première équation de transport d'un grain sphérique dans un fluide au repos dans laquelle apparaissent les termes de masse ajoutée, de traînée et de force d'histoire. Plus tard, [Basset \(1888a et 1888b\)](#) retrouve la même équation et laissera son nom au terme d'histoire qui sera souvent appelé *force de Basset*. [Oseen \(1927\)](#) étend ensuite les calculs de [Stokes \(1845\)](#) à des nombres de Reynolds pouvant aller jusqu'à 1 en linéarisant les équations de Navier-Stokes. [Faxén \(1922\)](#) introduit des termes correctifs afin de prendre en compte la non-uniformité du champ de vitesse qui avait toujours été considéré comme stationnaire et uniforme jusqu'alors. Puis [Tchen \(1947\)](#) adapte les formulations obtenues par [Boussinesq-Basset-Oseen](#) afin de les appliquer dans un fluide en mouvement instationnaire. Enfin, la compilation de tous ces résultats par [Maxey et Riley \(1983\)](#) a permis d'obtenir l'équation connue aujourd'hui sous le nom d'*équation de Maxey et Riley* (équation 2.3) :

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{v}_i(\vec{x}, t) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = & V_i (\rho_p - \rho_f) \vec{g} + m_f \frac{D\vec{u}_i}{Dt} - \frac{1}{2} m_f \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i - \vec{u}_i - \frac{1}{10} r_i^2 \nabla^2 \vec{u}_i \right) \\ & - 6\pi r_i \mu \left(\vec{v}_i - \vec{u}_i - \frac{1}{6} r_i^2 \nabla^2 \vec{u}_i \right) \\ & - 6\pi r_i^2 \mu \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\vec{v}_i(\tau) - \vec{u}_i(\tau) - \frac{1}{6} r_i^2 \nabla^2 \vec{u}_i \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

où V_i et r_i sont respectivement les volume et rayon du grain i , \vec{u}_i est la vitesse du fluide à la position du centre du grain i , ρ_p et ρ_f sont respectivement les masses volumiques du grain i et du fluide, d_i est le diamètre du grain i , m_f est la masse de fluide contenue dans le volume du grain i , \vec{g} est l'accélération de pesanteur dont l'intensité est prise égale à $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ et μ et ν sont les viscosités dynamique et cinématique respectivement. Enfin, $\frac{D}{Dt}$ représente la dérivée *lagrangienne* (ou *particulare*), c'est-à-dire que l'on suit une particule fluide lors de la dérivation, tandis que $\frac{d}{dt}$ représente la dérivée *eulérienne* classique. Dans l'équation 2.3, les termes représentent respectivement la force de pesanteur, la force due au gradient de pression autour du grain, la force de masse ajoutée, la traînée visqueuse et la force d'histoire (ou force de Basset). Les termes faisant apparaître $\nabla^2 \vec{u}_i$ sont les corrections de Faxén. Notons que ces termes ne sont pas rigoureusement dissociables les uns des autres puisque c'est l'ensemble qui représente la force appliquée par le fluide sur le grain (à laquelle est ajoutée la force de pesanteur). Ainsi, les mesures expérimentales ne peuvent mesurer que la force globale. Il est malgré tout plus commode de les dissocier et de les caractériser de manière séparée.

2.2 Forces appliquées au grain

2.2.1 Pesanteur et flottabilité

Historiquement, le premier terme de l'équation 2.3 à avoir été étudié fut le terme de pesanteur puisqu'il était connu dès les travaux d'Archimède. Ce terme exprime simplement d'une part la poussée qu'exerce un fluide sur un corps immergé due à la différence de pression entre les différentes faces du solide, la pression étant plus importante sur les parties inférieures du solides, et d'autre part la force de pesanteur qui s'applique à la masse du solide.

2.2.2 Masse ajoutée

Ce terme de masse ajoutée fut le second à être étudié de manière soutenue, notamment au 18^e siècle, qui se matérialise par le fait qu'un objet en mouvement dans un fluide entraîne une part de ce fluide avec lui (voir figure 2.1). Ainsi, il

faut considérer le nouveau système *objet + fluide entraîné* pour pouvoir déterminer l'accélération de cet objet. Ceci est permis par l'ajout du terme $\vec{F}_{MA} = \frac{1}{2}m_i \frac{d}{dt}(\vec{v}_i - \vec{u}_i)$ qui apparaît dans l'équation 2.3. Cette formulation n'est vraie que lorsque la taille du grain est petite devant l'échelle de Kolmogorov. Si ce n'est pas le cas, [Auton et al. \(1988\)](#) propose de remplacer cette expression par $\vec{F}_{MA} = \frac{1}{2}m_i \left(\frac{d}{dt}(\vec{v}_i - \vec{u}_i) - \frac{D\vec{u}_i}{Dt} \right)$, ce qui permet de prendre en compte l'effet du gradient de vitesse autour du grain. [Minier \(1988\)](#) montre un peu plus tard que l'expression de [Auton et al.](#) tend vers celle donnée par [Maxey et Riley](#) lorsque la taille du grain est suffisamment petite, cette expression peut donc être utilisée quelle que soit la taille du grain.

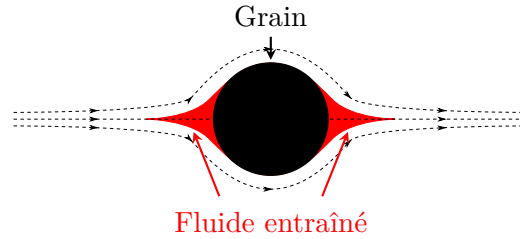


FIGURE 2.1 – Schéma du fluide entraîné (en rouge) par un objet sphérique (en noir) donnant lieu à la masse ajoutée.

2.2.3 Traînée visqueuse

Dès l'antiquité, les Égyptiens avaient déjà remarqué que l'eau ne s'écoulait pas à la même vitesse en fonction de la température. De même, les Romains savaient prendre en compte les effets de friction lors de la construction de leurs réseaux d'eau. Il a cependant fallu attendre les travaux de [Newton et de Breteuil Du Châtelet \(1759\)](#) pour que cette friction soit décrite précisément en ces termes :

La résistance qui vient du manque de lubricité des parties d'un fluide doit être, toutes choses égales, proportionnelle à la vitesse avec laquelle les parties de ce fluide peuvent être séparées les unes des autres.

Plus tard, Poiseuille s'intéresse à l'écoulement de fluide dans des capillaires et remarque que cet écoulement dépend des paramètres du tube capillaire (son diamètre et sa longueur), de la pression appliquée en entrée du tube et d'un autre paramètre inconnu lié au fluide. Enfin, [Wiedemann \(1856\)](#) introduit le terme de viscosité (*Zähigkeitsconstant de Flüssigkeiten* dans le texte original en allemand) pour désigner ce paramètre.

L'application de cette viscosité au cas d'une sphère en mouvement dans un fluide au repos a été formalisée par [Stokes \(1845\)](#), qui parle alors de *friction* et non de viscosité. Elle représente les contraintes dues aux frottements du fluide sur la surface

du grain et s'exprime de la manière suivante :

$$\vec{F}_T = -\frac{24}{Re_p} \pi \rho r_i^2 \|\vec{v}_i\| \vec{v}_i \quad (2.4)$$

avec Re_p le nombre de Reynolds particulaire.

2.2.4 Force d'histoire

La force d'histoire représente l'effet du temps d'établissement de la couche limite autour du grain sur la dynamique de celui-ci (Basset, 1888a). En effet, lors des phases d'accélération, l'écoulement autour du grain est dans une phase transitoire. L'état de cette phase transitoire est fonction de l'histoire de la dynamique du grain, c'est-à-dire de toutes les phases d'accélération précédentes qui participent à l'établissement de cette couche limite. Cette force est souvent négligée dans les simulations numériques du fait de son coût de calcul puisqu'il faut conserver en mémoire les états de toutes les itérations pour chaque grain simulé afin de la déterminer. Cependant, la contribution de cette force peut se révéler très importante dans certaines configurations, notamment pour les grains dits *légers*, c'est-à-dire que leur masse volumique est proche de celle du fluide qui les transporte. Dans l'équation de Maxey et Riley, cette force est représentée par le terme :

$$\vec{F}_H = -6\pi r_i^2 \mu \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\vec{v}_i(\tau) - \vec{u}_i(\tau) - \frac{1}{6} r_i^2 \nabla^2 \vec{u}_i \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}} \quad (2.5)$$

où F_H désigne la force d'histoire.

2.3 Extensions de l'équation de Maxey et Riley

L'équation de Maxey et Riley a un champ d'applications assez limité puisqu'elle repose sur plusieurs hypothèses fortes :

1. l'écoulement doit être rampant, c'est-à-dire que le nombre de Reynolds particulaire (Re_p) doit tendre vers 0.
2. le diamètre d_i du grain i doit être petit par rapport à l'échelle de Kolmogorov, c'est-à-dire petit par rapport aux plus petits tourbillons présents dans l'écoulement.
3. les vitesses initiales du grain i (v_i) et du fluide (u_i) doivent être identiques, sans quoi l'évaluation du terme d'histoire est biaisée (Reeks et McKee, 1984).

Pour essayer de pallier à ces limitations, de nombreuses propositions ont émané de différents auteurs.

En premier lieu, l'expression de Stokes a été d'abord étendue à des nombres de Reynolds supérieurs par Oseen puis par Schiller et Naumann (1933), Clift *et al.* (1978), White (2006) et Morrison (2013). Ces travaux se basent sur le raisonnement de Stokes en réécrivant simplement son expression initiale du coefficient de traînée

sous la forme $C_D = 24f/Re_p$ où f est un coefficient à déterminer empiriquement (Michaelides, 1997). La force de traînée dans un fluide en mouvement sera donc de la forme :

$$\vec{F}_T = -\frac{1}{2}C_D\pi\rho r_i^2\|\vec{v}_i - \vec{u}_i\|(\vec{v}_i - \vec{u}_i) \quad (2.6)$$

où C_D est le coefficient de traînée qui permet de s'affranchir de la très forte limitation initiale à des nombres de Reynolds très petits. Ces nouvelles expressions permettent le calcul du coefficient de traînée à des nombres de Reynolds particuliers pouvant aller jusqu'à $Re_p = 10^6$ dans le dernier cas, c'est-à-dire après la crise turbulente qui a lieu à $Re_p \simeq 2 \times 10^5$ qui correspond à la transition turbulente de la couche limite autour du grain. Ces différentes expressions du coefficient de traînée sont présentées en équations 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 et 2.12 puis représentées sur la figure 2.2. On remarque que toutes ces expressions convergent vers la solution de Stokes lorsque Re_p tend vers 0. Dans notre cas, considérant des grains sédimentaires d'environ $100\mu\text{m}$ et de masse volumique proche de celle du fluide ($1000 \leq \rho_p \leq 2500 \text{ kg/m}^3$), on s'attend à ce que les nombres de Reynolds particuliers restent faibles et l'on choisira l'expression de Clift *et al.* (1978) pour le coefficient de traînée car elle est la plus proche des mesures expérimentales dans cet intervalle de nombres de Reynolds.

Par ailleurs, d'autres propositions ont été suggérées pour les autres termes. Ainsi, Odar et Hamilton (1964) proposent d'employer des coefficients semi-empiriques pour les termes d'histoire et de masse ajoutée. L'expression de la force exercée par le fluide sur le grain se traduit alors par l'équation 2.13 dans un fluide au repos où la contribution due à la pesanteur a été extraite afin de simplifier l'écriture car celle-ci reste inchangée. Ces coefficients sont fonction du nombre de Reynolds et d'un nombre dit d'accélération (équation 2.16). Les coefficients Δ_A et Δ_H sont alors obtenus via les équations 2.14 et 2.15.

$$F = C_D(6\pi r_i \mu v_i) + \Delta_A m_f \frac{dv_i}{dt} + \Delta_H \left(r_i^2 \sqrt{\pi \rho_f \mu} \int_0^t \frac{\frac{dv_i}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right) \quad (2.13)$$

$$\Delta_A = 1.05 - \frac{0.066}{0.12 + A_C^2} \quad (2.14)$$

$$\Delta_H = 2.88 - \frac{3.12}{(1 + A_C)^3} \quad (2.15)$$

$$A_C = \frac{|u_i - v_i|^2}{2r_i \left| \frac{dv_i}{dt} \right|} \quad (2.16)$$

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \quad \text{pour } Re_p \ll 1 \quad (2.7)$$

(Stokes, 1845)

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left(1 + \frac{3}{16} Re_p \right) \quad \text{pour } Re_p < 1 \quad (2.8)$$

(Oseen, 1927)

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left(1 + 0.15 Re_p^{0.687} \right) \quad \text{pour } Re_p < 800 \quad (2.9)$$

(Schiller et Naumann, 1933)

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left(1 + 0.15 Re_p^{0.687} \right) + \frac{0.42}{1 + 4.25 \times 10^4 Re_p^{-1.16}} \quad \text{pour } Re_p < 3 \times 10^5 \quad (2.10)$$

(Clift *et al.*, 1978)

$$C_D = \frac{24}{Re_p} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re_p}} + 0.4 \quad \text{pour } Re_p < 2 \times 10^5 \quad (2.11)$$

(White, 2006)

$$C_D = \frac{24}{Re_p} + \frac{2.6 \left(\frac{Re_p}{5} \right)}{1 + \left(\frac{Re_p}{5} \right)^{1.52}} + \frac{0.411 \left(\frac{Re_p}{263000} \right)^{-7.94}}{1 + \left(\frac{Re_p}{263000} \right)^{-8.0}} + \frac{0.25 \left(\frac{Re_p}{10^6} \right)}{1 + \left(\frac{Re_p}{10^6} \right)} \quad \text{pour } Re_p < 10^6 \quad (2.12)$$

(Morrison, 2013)

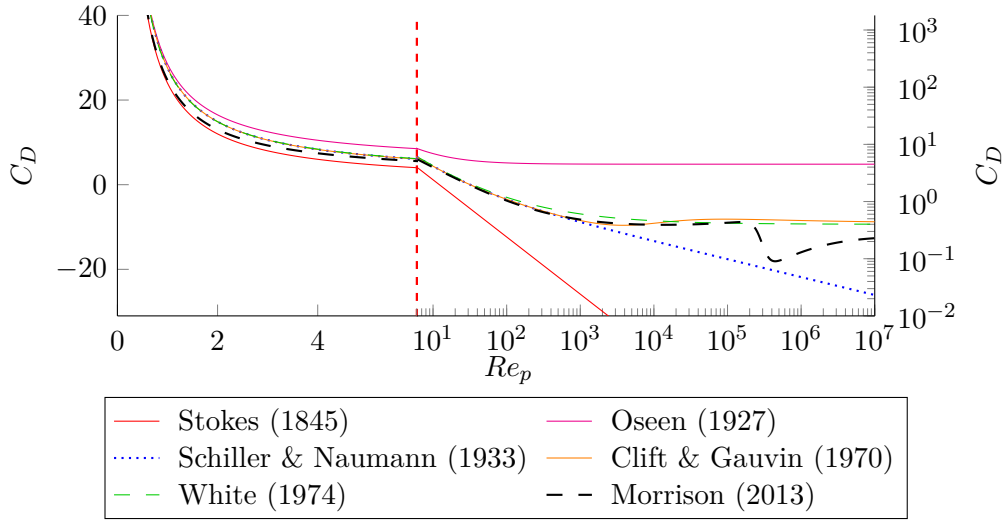


FIGURE 2.2 – Évolution des différentes expressions du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds particulaire.

Cependant, ces expressions ne sont qu'empiriques et les expériences ayant permis de les calculer sont très spécifiques car effectuées sur des champs oscillants. Il est donc difficile de vérifier que le comportement individuel d'un grain dans un écoulement quelconque suive précisément ces lois puisqu'il faudrait mesurer précisément à la fois le champ de vitesse tridimensionnel du fluide et la trajectoire du grain. De plus, ces corrections ne concernent que des régimes qui ne sont pas étudiés dans ce travail, elles ne seront donc pas utilisées.

Afin de corriger le paradoxe de [Reeks et McKee \(1984\)](#) selon lequel l'effet de la force d'histoire se prolonge aux temps très longs du fait de la lente décroissance du noyau en $1/\sqrt{t}$, ce qui ne semble pas physique car l'effet de la viscosité est supposé dissiper rapidement l'effet de mémoire, [Sano \(1981\)](#) propose l'utilisation d'un noyau différent pour les temps longs dont la décroissance serait exponentielle. Ce noyau permet d'annuler les effets de mémoire aux temps longs et permet par ailleurs de simplifier la résolution numérique et ainsi de limiter le temps de calcul nécessaire ([van Hinsberg et al., 2011](#)). Enfin, [Lawrence et Weinbaum \(1986\)](#) montrent que l'excentricité d'un grain fait apparaître un terme supplémentaire dans la force d'histoire. Ce travail remet donc en question l'utilisation de l'équation de [Maxey et Riley](#) pour des grains elliptiques en les modélisant par des grains sphériques avec un *diamètre équivalent* faisant en sorte que le volume du grain sphérique soit le même que le volume du grain elliptique à modéliser.

La troisième hypothèse importante de l'équation proposée par [Maxey et Riley](#) était que la vitesse initiale du grain i (v_i) devait être égale à celle du fluide (u_i). Si ce n'est pas le cas, la différence de vitesse induit une fine couche de vorticité autour du grain ce qui induit une force de traînée supplémentaire et un terme supplémentaire

apparaît sous la forme (Maxey, 1987) :

$$F = -\frac{6\pi r_i \mu (v_i - u_i)}{\sqrt{\pi \nu t}} \quad (2.17)$$

En pratique, il n'est pas possible d'introduire un grain sédimentaire dans l'écoulement à une vitesse différente de l'écoulement sans perturber celui-ci. Cependant, ce terme peut permettre de simuler une portion de la trajectoire d'un grain en représentant l'histoire précédant le début de la trajectoire simulée.

Dans le travail effectué, les corrections de Faxén sont négligées car les grains considérés sont supposés petits par rapport à l'échelle de Kolmogorov. Ainsi, l'expression 2.3 précédente peut être simplifiée en prenant l'expression de la force de masse ajoutée proposée par Auton *et al.* (1988) et se mettre sous la forme suivante qui sera utilisée dans la suite de l'étude :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_i}{dt} = & 2 \frac{\rho_p - \rho_f}{2\rho_p + \rho_f} \vec{g} + \frac{3\rho_f}{2\rho_p + \rho_f} \frac{D\vec{u}_i}{Dt} - \frac{3}{4r_i} \frac{\rho_f}{2\rho_p + \rho_f} (\vec{v}_i - \vec{u}_i) \|\vec{v}_i - \vec{u}_i\| C_D \\ & - \frac{9}{2r_i} \frac{\rho_f}{\rho_p + \frac{\rho_f}{2}} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{d(\vec{v}_i(\tau) - \vec{u}_i(\tau))}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(t - \tau)}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.4 Méthodes numériques

Le calcul des trajectoires des grains sédimentaires nécessite dans un premier temps la connaissance de l'écoulement fluide. Cet écoulement peut être fourni soit par le code Thétis (Simon, 2013), soit par des mesures expérimentales. Dans les deux cas, la représentation se fait sous forme discrète, c'est-à-dire que les grandeurs telles que la vitesse ne sont disponibles qu'en des points précis disposés sur un maillage cartésien et à des instants précis qui ne sont pas nécessairement également espacés. Or, il est nécessaire de connaître le champ de vitesse de manière continue à la fois en temps et en espace car les grains sédimentaires peuvent évoluer vers une position quelconque au sein du volume de calcul et pas seulement au niveau des points résolus par le code Thétis. Cette nécessité est aussi due à la méthode de résolution de l'équation de Maxey et Riley via un schéma d'intégration de type Runge-Kutta 4 qui nécessite la connaissance du champ de vitesse aux instants t , $t + dt/2$ et $t + dt$, où dt est le pas d'intégration. Des interpolations sont donc nécessaires afin de déterminer la vitesse du fluide à une position et un temps quelconque. Par ailleurs, la connaissance de la vitesse en des points discrets espacés par une distance arbitraire ne permet pas de connaître le comportement du fluide entre ces points. Ceci peut être très gênant lorsque l'écoulement est turbulent puisque les échelles plus petites que la distance séparant les points du maillage ne pourront pas être représentées. Des modèles permettant de reproduire les effets des petites échelles malgré cette perte d'information seront donc nécessaires.

2.4.1 Trajectoires des grains

Les trajectoires des grains sédimentaires sont calculées en utilisant un schéma d'intégration de type Runge-Kutta 4. Ce schéma, développé par [Runge \(1895\)](#) et [Kutta \(1901\)](#), permet de résoudre une équation différentielle de manière précise bien que le coût de calcul puisse être important. L'interpolation temporelle du champ de vitesse est effectuée selon un schéma linéaire car un schéma plus précis entraînerait un coût de calcul très élevé. Par ailleurs, les pas de temps utilisés par le code [Thétis](#) sont petits, de l'ordre de $5 \times 10^{-4} s$, ce qui réduit l'éventuel gain de précision obtenu par l'utilisation d'un schéma d'ordre plus élevé pour cette étape. Enfin, l'interpolation spatiale est réalisée à l'aide de B-Splines car ils permettent de restituer une bonne part du spectre d'énergie dans un écoulement turbulent ([Deutsch, 1992](#)). Ce type d'interpolation consiste à représenter une fonction continue dont les valeurs ne sont connues qu'en des points discrets par une succession de polynômes reliant deux points successifs.

Le terme d'histoire de l'équation de [Maxey et Riley](#) présente une forme intégrodifférentielle. Ce type d'équation est difficile à résoudre et nécessite souvent l'utilisation d'une transformation de Laplace. Numériquement, ce type d'équations peut présenter des termes qui ont des temps de variation très différents, ce qui peut déstabiliser le schéma numérique utilisé ([Curtiss et Hirschfelder, 1952](#)). Cette propriété implique l'utilisation de pas de temps petits ou bien d'un schéma d'intégration implicite et multi-étapes. C'est la première méthode qui a été choisie dans ce travail car le schéma de type Runge-Kutta 4 est aussi utilisé pour les méthodes suivantes, ce qui permet une comparaison plus simple des méthodes entre elles. Par ailleurs, ce terme d'histoire est très coûteux en terme de temps de calcul puisqu'il fait intervenir toutes les étapes précédentes et ne décroît que lentement, ce qui oblige à stocker l'ensemble des pas de temps pour chacun des grains simulés sans pouvoir négliger les termes les plus lointains du point de vue temporel. Différentes méthodes ont été proposées pour faciliter le calcul de ce terme, comme par exemple [Dorgan et Loth \(2007\)](#) qui négligent la contribution des instants les plus éloignés lors du calcul du terme d'histoire à l'instant t et obtiennent tout de même des résultats pertinents pour des cas de sédimentation simple mais pas dans le cas où les grains oscillent rapidement. Enfin, ce terme présente une singularité pour $t \rightarrow 0$, ce qui accroît encore la difficulté de la résolution. Dans ce travail, nous utilisons les méthodes présentées par [van Hinsberg et al. \(2011\)](#) qui permettent de s'affranchir de la plupart de ces difficultés. Ces méthodes consistent à élaborer un schéma de type trapézoïdal en supposant que l'évolution du système est linéaire entre deux instants connus. Ceci permet d'obtenir une expression analytique pour les temps faibles et écarte ainsi le problème de la singularité.

2.4.2 Turbulence dans le fluide

Dans le cadre du projet Mascaret, les champs de vitesse représentant le mascaret et utilisés comme support pour le transport des grains sédimentaires sont simulés

par l'équipe du département TREFLE de l'I2M (Simon, 2013). Ceux-ci font appel à une méthode VOF (pour *Volume Of Fluids*) pour la modélisation de la surface libre et à une technique de type LES (pour Large Eddy Simulation) pour modéliser la turbulence.

La méthode VOF (Hirt et Nichols, 1981) consiste simplement à considérer que l'ensemble du domaine est constitué de fluide. Pour déterminer l'interface entre deux fluides, un traceur passif est advecté dans l'écoulement ce qui permet de différencier les deux fluides, souvent de l'air et de l'eau, en déterminant la fraction volumique de chacun des fluides dans chacune des mailles du domaine de calcul.

La technique LES, proposée par Smagorinsky (1963), opère un filtrage spatial sur le champ de vitesse par un produit de convolution avec un noyau de coupure G de taille $\overline{\Delta}$. Cette opération permet de ne représenter que les larges structures tourbillonnaires et de couper les structures de taille inférieure à $\overline{\Delta}$. L'effet sur l'écoulement des petites structures filtrées est alors modélisé par une viscosité turbulente ν_t qui vient s'ajouter à la viscosité du fluide ν . Le modèle de base de LES a été proposé par Smagorinsky (1963) dans lequel cette viscosité turbulente est définie par :

$$\nu_{t,Sma} = (C_S \overline{\Delta})^2 \sqrt{2\overline{S}^2} \quad (2.19)$$

où C_S est la constante de Smagorinsky qui est généralement fixé entre 0,18 et 0,23, $\overline{\Delta} = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$ est la longueur de coupure avec Δ_x , Δ_y et Δ_z les tailles des maillages dans les direction X , Y et Z respectivement et $\overline{S} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla}^T \vec{u})$ avec \vec{u} le vecteur vitesse filtré :

$$\vec{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{u}(x - x') G(x') dx' \quad (2.20)$$

Plus tard, Bardina *et al.* (1980) a proposé le modèle TKE (pour Turbulent Kinetic Energy) dans lequel la viscosité turbulente ν_t dépend d'une fonction représentant l'énergie cinétique turbulente de sous-maille, c'est à dire des échelles filtrées :

$$\nu_{t,TKE} = \rho C_{TKE} \overline{\Delta} \sqrt{q_{sm}} \quad (2.21)$$

où C_{TKE} est une constante généralement fixée à 0,2 et $q_{sm} = \frac{1}{2} (\overline{u' u'})$ est l'énergie sous sous-maille avec $\overline{u'}$ la vitesse de coupure qui est déterminée par double filtrage.

Ces deux modèles ont été combinés par Sagaut (1998) pour donner naissance au modèle d'échelles mixtes (MSM, pour Mixed Scale Model). Ce modèle fait intervenir un paramètre α permettant le passage continu d'un modèle à l'autre :

$$\nu_t = (\nu_{t,Sma})^\alpha - (\nu_{t,TKE})^{1-\alpha} \quad (2.22)$$

où le paramètre α peut varier entre 0 et 1. Généralement, ce paramètre est fixé à $\alpha = 0,5$. Dans le travail présenté ici, c'est ce dernier modèle d'échelles mixtes qui a été choisi pour modéliser la turbulence de sous-maille.

2.4.3 Particules et turbulence

L'interpolation du champ de vitesse par des B-Splines ne permet d'interpoler que la vitesse filtrée, ce qui ne permet pas de rendre compte de la turbulence de sous-maille qui peut pourtant avoir un effet non-négligeable sur le transport des grains sédimentaires. Pour prendre en compte cette turbulence, un modèle doit être implémenté dans la méthode de calcul des trajectoires. Plusieurs auteurs ont proposé des méthodes permettant d'intégrer la turbulence de sous-maille à la trajectoire des particules à partir d'une vitesse u'_i fluctuant de manière aléatoire et venant s'ajouter à la vitesse déterministe déterminée par interpolation de la vitesse filtrée. Les paramètres de cette fluctuation étant supposés retranscrire l'intensité de la turbulence de sous-maille à la position des différents grains.

Wang et Squires (1996) ont par exemple proposé de modéliser cette fluctuation par :

$$u'_i(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{2\bar{k}(\vec{x}, t)}{3}} \zeta \quad (2.23)$$

où ζ est un nombre aléatoire de distribution gaussienne ayant une moyenne nulle et un écart-type unitaire et \bar{k} est l'énergie cinétique de sous-maille. Ce modèle très simple permet de représenter partiellement la turbulence de sous-maille mais les auteurs ne constatent qu'une modification de 1% de la variance des vitesses des particules dans le cas qu'ils présentent. Ceci est probablement dû au fait que cette modélisation est purement aléatoire et n'a aucun effet de mémoire. Cependant, leur étude se concentre sur des cas où la turbulence de sous-maille est faible puisque leurs mailles sont petites et leur nombre de Reynolds faible ($Re = 640$).

Un second modèle a été proposé par Pozorski et Minier (1998) dans lequel la vitesse fluctuante obéit à une équation de Langevin :

$$du'_i(\vec{x}, t) = \frac{u'_i(\vec{x}, t)}{T_L} dt + \sqrt{\frac{2\bar{\sigma}^2}{T_L}} \zeta \quad (2.24)$$

où $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{2\bar{k}}{3}}$ et $T_L = \left(\frac{4\bar{k}}{3C_0\bar{\varepsilon}} \right) / \sqrt{1 + \beta^2 \frac{\vec{u}_i - \vec{v}_i}{\bar{\sigma}}}$ avec $\beta = 2$ dans la direction de la gravité et $\beta = 2$ dans les autres directions. Ce second modèle est plus lourd mais introduit un effet de mémoire qui permet une meilleure représentation des effets de la turbulence sur les trajectoires des grains sédimentaires.

Cependant, dans la présente étude, n'ayant pas accès à la variable $\bar{\varepsilon}$ avec les champs de vitesse, seul le modèle de Wang et Squires (1996) peut être utilisé dans notre cas.

2.5 Validation

Afin de contrôler la précision des méthodes utilisées, deux validations analytiques sont effectuées : l'une concernant la sédimentation d'une sphère lâchée dans

un fluide au repos sans vitesse initiale et une seconde dans un champ de vitesse oscillant.

2.5.1 Vitesse de sédimentation

La sédimentation d'un grain sédimentaire sphérique dans un fluide au repos est régie par l'équation de [Maxey et Riley](#). [Sobral et al. \(2007\)](#) proposent des solutions analytiques pour cette équation dans trois situations. Un premier cas, qu'ils nomment *linéaire*, correspond à l'équation de [Maxey et Riley](#) lorsque le terme de traînée visqueuse est celui proposé par [Stokes](#) et que la force d'histoire est négligée. Le second cas correspond au cas linéaire dans lequel la force d'histoire est prise en compte. Le cas dit *non-linéaire* calcul la force de traînée visqueuse grâce à l'expression d'[Oseen](#) en négligeant le terme d'histoire. Le cas non-linéaire avec l'effet de la force d'histoire n'est pas détaillé car aucune solution analytique n'a été obtenue à l'heure actuelle. Ces solutions analytiques sont détaillées en annexe [A](#). Dans ces équations, la vitesse du grain est adimensionnée par la vitesse de sédimentation de [Stokes](#) et le temps est adimensionné par le temps de relaxation particulaire défini par l'équation :

$$\tau_r = \frac{m_i}{6\pi\mu r_i} \quad (2.25)$$

On a alors :

$$\hat{t} = \frac{t}{\tau_r} \quad (2.26)$$

$$\hat{v}_i = \frac{v_i}{U_S} \quad (2.27)$$

où U_S est la vitesse de sédimentation de [Stokes](#) :

$$U_S = \frac{2r_i^2 (\rho_p - \rho_f) g}{9\mu} \quad (2.28)$$

Le paramètre d'intérêt est alors le rapport de la masse volumique du fluide par celle du grain sédimentaire, appelé χ .

Ces solutions analytiques sont utilisées pour vérifier la précision des schémas de calcul utilisés pour résoudre l'équation de [Maxey et Riley](#). La figure [2.3](#) permet de comparer les solutions analytiques et numériques dans le cas linéaire avec et sans prise en compte des effets d'histoire. On observe une très bonne adéquation entre la solution analytique et le résultat numérique. Les erreurs relatives lorsque $\hat{t} = 100$ sont inférieures à 10^{-6} que ce soit avec ou sans la force d'histoire. Ici, le grain simulé a un diamètre $d_i = 100 \mu\text{m}$ et une masse volumique telle que $\chi = 0,5$, ce qui correspond aux grains sédimentaires que l'on souhaite étudier dans le cadre du projet [ANR Mascaret](#). Le pas de temps utilisé est égal à $dt = 10^{-5} \text{ s}$, ce qui correspond à $d\hat{t} = 10^{-2}$. Enfin, une autre différence importante entre les deux méthodes concerne le noyau utilisé pour résoudre le terme d'histoire de l'équation

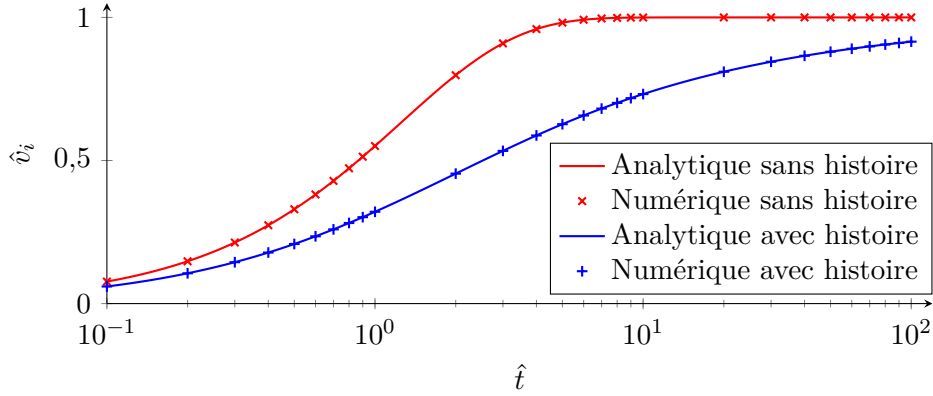


FIGURE 2.3 – Évolution de la vitesse verticale adimensionnée par la vitesse de sédimentation de Stokes en fonction du temps adimensionné par le temps de relaxation τ_r d'un grain sphérique soumis à la force hydrodynamique dite linéaire avec et sans le terme d'histoire, pour $\chi = 0,5$.

de Maxey et Riley. Dans ce travail, le noyau originel en $\frac{1}{\sqrt{t}}$ est conservé et calculé intégralement. Au contraire, van Hinsberg *et al.* remplacent le noyau précédent par un noyau en exponentielle décroissante pour les temps éloignés. Ceci permet alors de réduire le calcul du terme d'histoire à un simple calcul cumulatif pour les temps longs, ce qui réduit drastiquement le temps de calcul de ce terme ainsi que l'occupation mémoire. Une perspective intéressante serait d'implémenter ces méthodes et de les comparer aux codes développés au cours de cette thèse.

2.5.2 Solution analytique en champ oscillant

La seconde validation se base sur une autre solution analytique proposée par van Hinsberg *et al.* (2011). Il s'agit cette fois de calculer la trajectoire d'un grain sédimentaire évoluant dans un champ de vitesse uniforme mais dépendant du temps. La loi d'évolution de ce champ de vitesse est donnée par l'équation :

$$\vec{u}(t) = \frac{(m_f - m_i) \vec{g}}{6\pi a \mu} \cos(2t) \quad (2.29)$$

En injectant cette équation dans celle de Maxey et Riley, il est possible de calculer analytiquement la trajectoire d'un grain en utilisant le développement en série de Fourier de $\vec{u}(t)$ puis une transformation de Laplace. La procédure permettant d'obtenir l'équation de cette trajectoire est présentée en annexe B.

Dans le travail de van Hinsberg *et al.*, la validation de leur méthode numérique se fait grâce au calcul de l'erreur relative lorsque $t = 2\pi$ s. La même procédure est utilisée ici afin de pouvoir comparer les résultats à ceux de van Hinsberg *et al.*. Le tableau 2.1 présente l'évolution de cette erreur en fonction du nombre de pas de temps utilisés pour calculer l'évolution du grain dans l'intervalle $0 \leq t \leq 2\pi$ s.

Nombre de pas de temps	Erreur relative
5120	$5,99 \times 10^{-5}$
10000	$2,54 \times 10^{-5}$
15000	$8,71 \times 10^{-6}$
20000	$1,87 \times 10^{-6}$

TABLE 2.1 – Erreurs relative de la vitesse d’un grain évoluant dans un champ oscillant, calculée lorsque $t = 2\pi$.

Les méthodes utilisées dans ce travail permettent bien d’obtenir une solution fiable de l’équation de [van Hinsberg *et al.*](#) dans le cas où le champ de vitesse est dépendant du temps. Cependant, un nombre supérieur de pas de temps est nécessaire comparé à la méthode présentée par [van Hinsberg *et al.*](#) (environ 5 à 10 fois plus pour obtenir une précision comparable). Ceci est notamment dû au schéma d’intégration utilisé. [van Hinsberg *et al.*](#) utilise un schéma implicite de Adams-Bashforth au second ordre tandis qu’un schéma explicite de Runge-Kutta au quatrième ordre est utilisé ici. Il est difficile de comparer ces deux schémas puisque le schéma implicite est composé d’un processus itératif permettant d’obtenir la solution au temps $t + dt$. Ainsi, une itération de ce schéma implicite peut être équivalente à plusieurs itération d’un schéma explicite en terme de temps de calcul. Il est donc prévisible qu’un plus grand nombre de pas de temps soit nécessaire dans notre cas.

2.6 Études préliminaires

Avant d’appliquer cette méthode à l’étude du transport sédimentaire dans un mascaret, une courte analyse de l’impact des différents éléments de la force hydrodynamique ainsi que de la turbulence est effectuée. Celle-ci se focalise sur des grains de nature proche de ceux rencontrés dans la baie du Mont Saint-Michel, c’est-à-dire des grains d’environ 100 μm de diamètre et de masse volumique allant de 1000 kg/m^3 à 2500 kg/m^3 . La première étude préliminaire consiste à quantifier le rôle de chaque composante de la force hydrodynamique sur les grains sédimentaires. Pour cela, nous analyserons plusieurs configurations dans lesquelles chaque composante sera activée ou non, tantôt lors de la sédimentation d’un grains dans un fluide au repos, tantôt dans une veine turbulente.

2.6.1 Sédimentation

Les figures 2.4 et 2.5 présentent l’évolution de la vitesse verticale d’un grain lâché dans un fluide au repos, soumis à différentes combinaisons de termes composant la force hydrodynamique. Sur ces figures, les vitesses sont adimensionnées par la vitesse de sédimentation de [Stokes](#) et le temps est adimensionné par le temps de relaxation τ_r défini en 2.25. Les configurations étudiées sont :

- traînée de [Stokes \(1845\)](#) uniquement, légendé S .
- traînée de [Stokes \(1845\)](#) et masse ajoutée, légendé SA .
- traînée de [Stokes \(1845\)](#), masse ajoutée et force d'histoire, légendé SAH .
- traînée de [Clift et al. \(1978\)](#) uniquement, légendé C .
- traînée de [Clift et al. \(1978\)](#) et masse ajoutée, légendé CA .
- traînée de [Clift et al. \(1978\)](#), masse ajoutée et force d'histoire, légendé CAH .

Cette étude se concentre sur deux masses volumiques de grains, $\rho_p = 1100 \text{ kg/m}^3$ ($\chi = 0,91$) et $\rho_p = 2000 \text{ kg/m}^3$ ($\chi = 0,5$), ce qui permet d'observer les effets des différentes forces entre les deux extrémités de la gamme qui nous intéresse dans le cadre du projet [ANR Mascaret](#).

Pour le cas $\chi = 0,91$, le calcul du terme de traînée visqueuse selon le coefficient de [Stokes \(1845\)](#) ou de [Clift et al. \(1978\)](#) ne modifie que très peu l'évolution de la vitesse du grain puisqu'elle n'est que 2% plus faible dans la configuration C par rapport à la configuration S . Par ailleurs, le temps que la vitesse du grain atteigne 99% de la vitesse terminale n'est que 0,04% plus court dans la configuration C que dans la configuration S . Un effet plus sensible de la masse ajoutée est observé puisque le temps pour que la vitesse du grain atteigne 99% de la vitesse terminale de sédimentation est allongé de 31% entre les configurations S et SA et de 33% entre les configurations C et CA . Par ailleurs, cet effet se fait essentiellement sentir au début de l'accélération du grain puisque l'écart selon l'axe du temps \hat{t} entre les deux courbes S et SA et entre les deux courbes C et CA reste quasiment constant au delà de $\hat{t} = 0,2$. Mais l'effet le plus notable concerne la force d'histoire. Celle-ci ne modifie pas la vitesse terminale du grain et devient négligeable au temps longs mais joue un rôle majeur lorsque $\hat{t} \leq 100$. Son effet est maximal dans l'intervalle $1 \leq \hat{t} \leq 2$ puisque c'est dans cet intervalle que l'accélération du grain, c'est à dire la pente des courbes de la figure 2.4, diffère le plus entre les configurations SA et SAH et entre les configurations CA et CAH . Ainsi, le temps pour que la vitesse du grain atteigne 50% de la vitesse terminale est multiplié par 3,76 entre les configurations SA et SAH et par 3,78 entre les configurations CA et CAH . L'effet de cette composante est donc très important lorsque la masse volumique du grain est très proche de celle du fluide.

Dans le cas $\chi = 0,5$, l'effet de la traînée visqueuse calculée selon le coefficient de [Clift et al. \(1978\)](#) est plus important que précédemment par rapport au calcul selon le coefficient de [Stokes \(1845\)](#). Cette fois-ci, la vitesse terminale du grain est réduite de 8,5% dans la configuration C par rapport à la configuration S . Le temps que la vitesse du grain atteigne 99% de la vitesse terminale est 0,19% plus court dans la configuration C que dans la configuration S . La modification du terme de traînée visqueuse a donc un effet important pour $\chi = 0,5$, ce qui est dû aux termes non-linéaires du coefficient de [Clift et al. \(1978\)](#) en fonction du nombre de Reynolds particulaire Re_p . Au contraire, l'effet du terme de masse ajoutée est légèrement plus faible dans ce cas puisque le temps nécessaire au grain pour atteindre 99% de sa vitesse terminale de sédimentation n'est allongé que de 25% entre les configurations S et SA et de 31% entre les configurations C et CA . La force d'histoire est moins

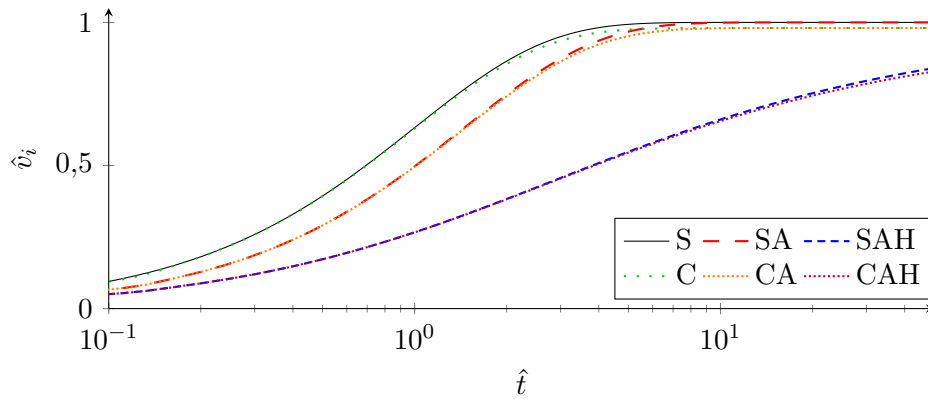


FIGURE 2.4 – Évolution de la vitesse verticale adimensionnée par la vitesse de sédimentation de Stokes en fonction du temps adimensionné par le temps de relaxation τ_r d'un grain sphérique soumis à différentes combinaisons de termes composant la force hydrodynamique.

importante lorsque la masse volumique augmente, ce qui est observé par exemple dans les travaux de Armenio et Fiorotto (2001); Sobral *et al.* (2007). Cette fois-ci, le temps pour que la vitesse du grain atteigne 50% de la vitesse terminale est multiplié par 3,36 entre les configurations SA et SAH et par 3,4 entre les configurations CA et CAH. Ainsi, bien que moins diminuant avec la masse volumique du grain, l'effet de cette composante d'histoire reste très important dans la gamme de grains sédimentaires étudiés.

2.6.2 Écoulement turbulent

Afin de quantifier l'importance des différentes composantes de la force hydrodynamique, des grains sédimentaires sont injectés au centre d'un canal fermé tridimensionnel dont la turbulence est générée selon la méthode de Jarrin *et al.* (2005) afin de modéliser une turbulence de grille. Comme précédemment, les trajectoires des grains sont calculées en activant tour à tour les différents termes de l'équation de Maxey et Riley (1983) et la turbulence de sous-maille est modélisée par une composante aléatoire ajoutée à la vitesse des grains sédimentaires qui dépend de l'intensité locale de la turbulence (voir section 6.2.1.1).

Le canal est long de 2 m et de section carrée de 0,1 m de côté et la grille est placée en entrée du canal, en $x = 0$ m. Les champs de vitesse correspondant à ce problème ont été générés par le code Thétis, (Simon, 2013, pages 103 à 112). Les conditions de bord ont été modélisées par une condition d'adhérence sur les parois et une condition de Neumann en sortie du canal. Le domaine est discrétisé selon un maillage cartésien de $600 \times 100 \times 100$ mailles dont la taille est constante selon x et égale à $0,333 \times 10^{-2}$ m mais est variable selon y et z afin de raffiner la discrétisation proche des parois. La taille des mailles selon y et z varie de 10^{-4} m à $3,62 \times 10^{-3}$ m.

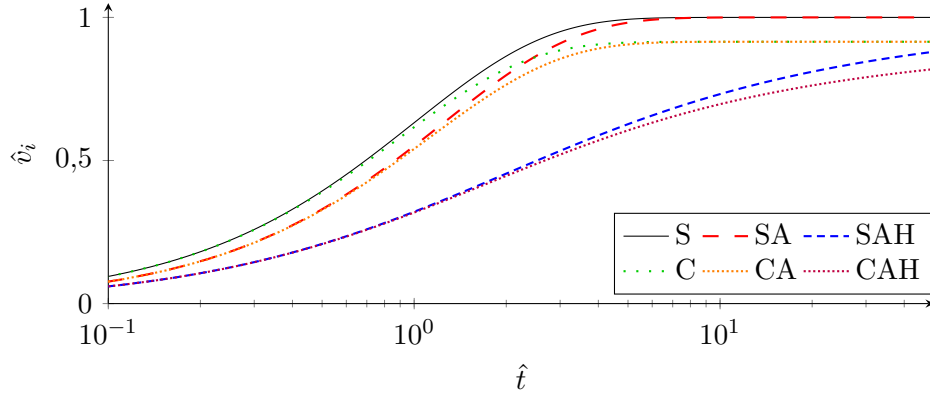


FIGURE 2.5 – Évolution de la vitesse verticale adimensionnée par la vitesse de sédimentation de **Stokes** en fonction du temps adimensionné par le temps de relaxation τ_r d'un grain sphérique soumis à différentes combinaisons de termes composant la force hydrodynamique.

Le nombre de Reynolds au centre de la veine basé sur la largeur du canal est égal à 20 000.

Les grains sédimentaires sont injectés à la position $(0,1;0,05;0,05)$ toutes les 0,02 s. Leur diamètre est égale à 1×10^{-4} m et leurs masses volumiques varient de 1250 kg/m^3 à 2500 kg/m^3 et le nombre de Schmidt turbulent utilisé est égal à 1. Les trajectoires de chacun des grains sont calculées durant 1 s dans six configurations différentes en négligeant certains termes de l'équation de **Maxey et Riley (1983)** :

- configuration 1 : les termes de pesanteur, de traînée visqueuse, de masse ajoutée et d'histoire sont négligés.
- configuration 2 : les termes de pesanteur et d'histoire sont négligés.
- configuration 3 : le terme de pesanteur est négligé.
- configuration 4 : les termes de traînée visqueuse, de masse ajoutée et d'histoire sont négligés.
- configuration 5 : le terme d'histoire est négligé.
- configuration 6 : aucun terme n'est négligé.

Ces différentes configurations sont calculées en utilisant la même séquence de nombres aléatoires utilisés dans la modélisation de viscosité de sous-maille afin de faciliter les comparaisons. Ces différentes trajectoires sont alors comparées de manière statistique sur environ 10000 grains. Les figures 2.6, 2.7 et 2.8 représentent l'écart moyen selon x , y et z des grains entre deux configurations données :

$$|\overline{\Delta x}|_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k^i - x_k^j) \quad (2.30)$$

où N est le nombre de grains et i et j sont les numéros des configurations considérées. L'équation 2.30 s'applique de la même manière aux directions y et z . Toutes les comparaisons ne sont pas effectuées car l'activation ou non de la pesanteur entraîne

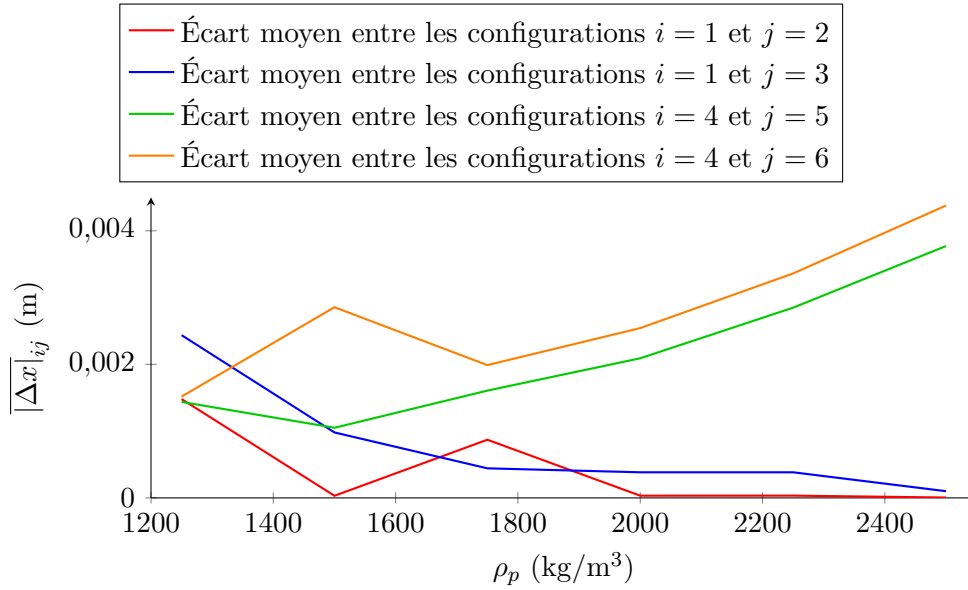


FIGURE 2.6 – Évolution de l'écart moyen selon x entre deux configurations pour différentes valeurs de la masse volumique.

une trop grande divergence des trajectoires des grains qu'il n'est pas pertinent de comparer. Ainsi, les configurations 2 et 3 sont comparées à la configuration 1 et les configurations 5 et 6 sont comparées à la configuration 4.

Dans les configurations 1, 2 et 3 la gravité est absente, ce qui signifie que les écarts de trajectoires restent faibles. Cependant, l'activation des forces de traînée visqueuse et de masse ajoutée (configuration 2) entraîne des écarts notables pour les plus faibles masse volumiques, de l'ordre de mm. En revanche, pour les masse volumiques supérieures à 2000 kg/m^3 les écarts sont très faibles, ce qui signifie que ces deux forces ont peu d'effet par rapport à l'entraînement du fluide. Un pic apparaît pour une masse volumique égale à 1750 kg/m^3 qui pourrait être dû à des interactions complexes entre les effets inertiels et les forces mises en jeu. Nous verrons dans le chapitre 6 que ce type de comportement se retrouve dans les trajectoires de grains au sein d'un mascaret pour des masses volumiques similaires. L'activation de la force d'histoire (configuration 3) augmente nettement l'écart avec la configuration 1, même pour des masses volumiques élevées bien qu'il diminue lorsque celle-ci augmentent. L'écart peut alors aller jusqu'à 5 mm pour la plus faible masse volumique étudiée, soit une augmentation de près de 35 % par rapport à la configuration 2 où la force d'histoire n'était pas prise en compte.

La gravité est maintenant activée dans les configuration 4, 5 et 6. Dans la configuration 4, l'absence de terme de traînée visqueuse induit une accélération verticale constante due à la pesanteur, à la quelle s'ajoute l'accélération due à l'entraînement du fluide. Or, le terme de gravité dépend de la masse volumique des grains sédimentaires mais pas le terme de traînée visqueuse qui ne dépend que de la forme et de la

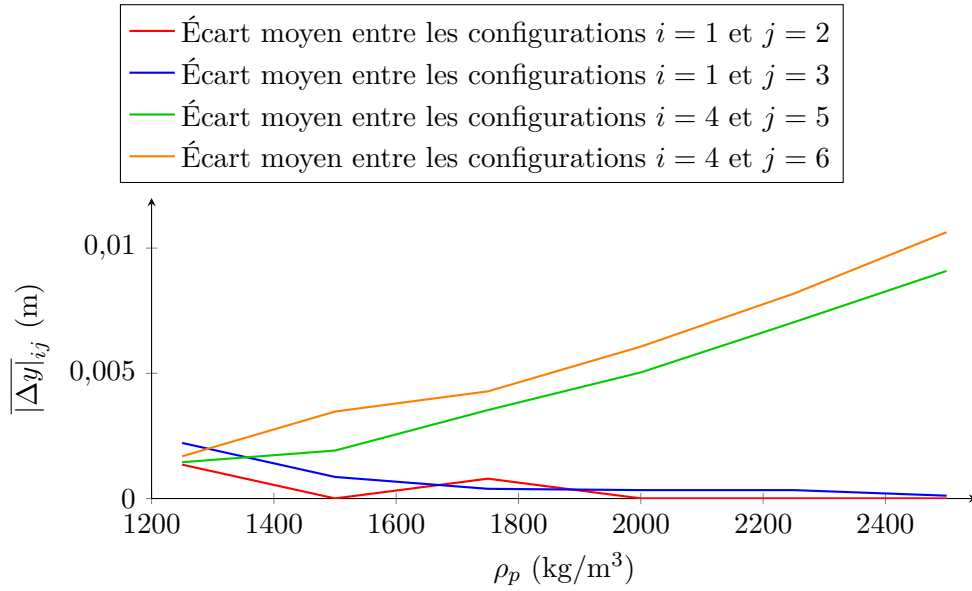


FIGURE 2.7 – Évolution de l'écart moyen selon y entre deux configurations pour différentes valeurs de la masse volumique.

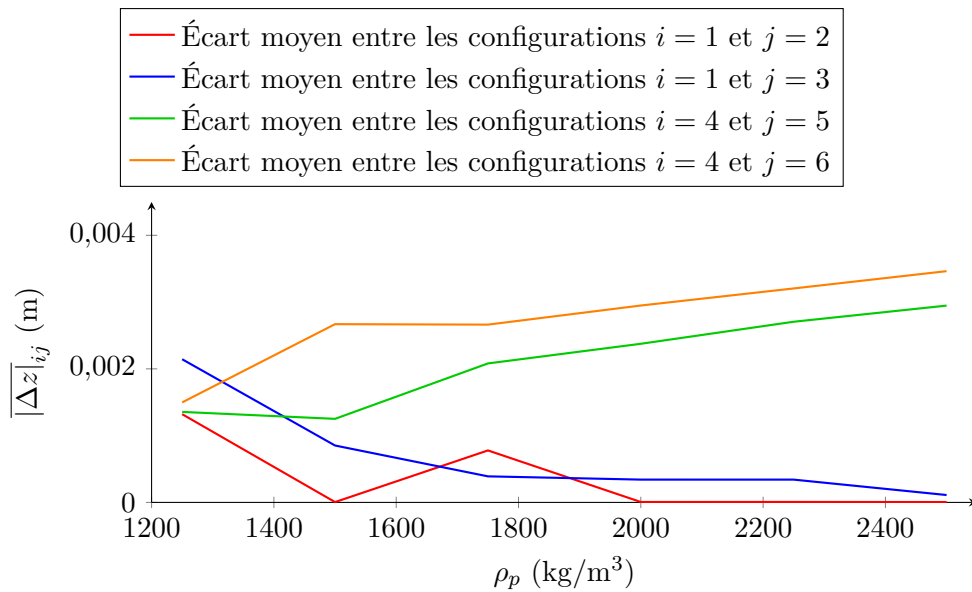


FIGURE 2.8 – Évolution de l'écart moyen selon z entre deux configurations pour différentes valeurs de la masse volumique.

taille de ces grains. Ainsi, l'effet semble inversé sur les figures précédentes puisque, cette fois-ci, les écarts augmentent avec la masse volumique. Ces augmentations ne sont cependant dues qu'à cet équilibre entre gravité et traînée visqueuse, les contributions des autres termes diminuant bien lorsque la masse volumique augmente. Par ailleurs, pour les faibles masses volumiques, les écarts moyens sont très proches du cas sans gravité, ce qui s'explique par la faible contribution du terme de gravité dans cette gamme de masses volumiques.

Cette étude montre ainsi l'importance du terme d'histoire pour les grains sédimentaires que nous souhaitons étudier par la suite, c'est à dire des grains dont la taille est de $100\ \mu\text{m}$ et dont la masse volumique est comprise entre $1000\ \text{kg/m}^3$ et $2500\ \text{kg/m}^3$. Les valeurs observées sont du même ordre de grandeur que celles obtenues par [van Aartrijk et Clercx \(2010\)](#) bien que les conditions soient différentes. Il ne sera donc pas possible de négliger ce terme comme ce qui est souvent fait dans d'autres études, notamment dans le cas de sédiments transportés dans l'air car, dans ce cas, le rapport entre les masses volumiques du fluide et des grains est de l'ordre de 1000, ce qui autorise la simplification.

2.7 Conclusion

Ce chapitre a présenté les techniques employées pour simuler les trajectoires des grains sédimentaires sphériques dans les écoulements turbulents. Ces méthodes ont été validées et permettent d'obtenir une solution précise de l'équation de [Maxey et Riley \(1983\)](#) même dans le cas d'un écoulement instationnaire, comme c'est le cas dans les mascarets. Les différents termes de cette équation ainsi que leurs significations physiques ont par ailleurs été présentés. Une courte étude du comportement des différents termes a aussi été réalisée. Il apparaît que tous les termes sont nécessaires à l'obtention d'une solution précise pour la gamme de grains sédimentaires que nous souhaitons étudier dans le cadre du projet [ANR Mascaret](#). Ces termes sont cependant coûteux en terme de temps de calcul, ce qui a nécessité des développements supplémentaires, notamment au niveau de la parallélisation des codes de calcul. Celle-ci fait appel à une méthode hybride combinant une décomposition en *processus* via la librairie *MPI*, chaque processus étant ensuite décomposé en *threads* via la librairie *BOOST*. Ce mode de parallélisation permet de calculer l'intégralité de la force hydrodynamique, notamment la composante d'histoire, pour un grand nombre de grains sédimentaires.

Méthode particulaire

Sommaire

3.1	Introduction	61
3.2	Méthodes numériques	64
3.2.1	Représentation intégrale et discrétisation du problème	64
3.2.2	Calcul de l'évolution des particules numériques	66
3.2.3	Calcul du gradient de concentration	67
3.2.4	Méthode de remaillage	71
3.2.5	Traitement des conditions aux limites	72
3.2.6	Traitement de la turbulence	75
3.3	Validation	75
3.4	Conclusion	78

3.1 Introduction

Le suivi des grains sédimentaires de manière individuelle est aujourd'hui possible, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent. Cependant, le suivi d'un nombre pertinent de grains à l'échelle d'une rivière reste encore largement hors de portée des calculateurs actuels. C'est pourquoi d'autres méthodes existent pour suivre non pas les grains individuels mais la concentration locale en grains. Les volumes de contrôle permettant de définir cette concentration locale peuvent alors avoir une taille de plusieurs ordres de grandeur au-dessus de la taille d'un grain, ce qui permet de représenter des systèmes beaucoup plus vastes pour un temps de calcul équivalent. Cependant, une quantité plus faible d'information est obtenue sur le système, il faut donc veiller à ce que l'étude à réaliser ne requiert pas d'information à l'échelle du grain, sans quoi la seule modélisation pertinente sera le suivi des grains individuels. Dans le cadre du projet Mascaret, si les trajectoires précises de quelques grains individuels peuvent être pertinentes, le calcul des trajectoires de l'ensemble des grains n'est par contre pas nécessaire puisque aucune donnée expérimentale ou de terrain n'est disponible pour une éventuelle comparaison. L'évolution de la concentration en grains à l'échelle du fleuve est suffisante et c'est pour cette raison que les méthodes permettant le transport de cette concentration vont être utilisées.

Nous avons vu dans le chapitre 1 d'introduction que cette méthode se base sur l'échelle de Fick, c'est-à-dire l'échelle où les grains sédimentaires sont représentés par un champ continu de concentration. Cette concentration est définie comme une masse de grains sédimentaires présents dans un volume élémentaire et s'exprime souvent en grammes par litre (g/l).

Mathématiquement, l'évolution de cette grandeur est gouvernée par les flux dus à la diffusion, à l'advection ainsi qu'aux éventuelles autres forces volumiques en présence. Ces flux apparaissent lorsque l'on écrit l'équation de conservation sur un volume élémentaire :

$$\frac{\partial C(\vec{x},t)}{\partial t} + \nabla \vec{j} = A \quad (3.1)$$

où \vec{j} est la densité de courant de grains qui permet de déterminer le flux de concentration à travers la surface fermée délimitant le volume élémentaire et A est un terme source qui représente la production ou la destruction de matière au sein de ce volume. Dans notre étude, aucune matière n'est ni créée ni détruite et le terme A sera toujours nul. Le flux \vec{j} peut être décomposé en trois termes dans le cas où l'on étudie l'évolution de la concentration de grains entraînés par le fluide, pouvant être dispersés soit par la diffusion moléculaire soit par la turbulence représentée de manière indirecte par une grandeur ou plusieurs grandeurs associées à l'écoulement :

$$\vec{j} = \vec{j}_{advection} + \vec{j}_{diffusion} + \vec{j}_{pesanteur} \quad (3.2)$$

où :

$$\begin{cases} \vec{j}_{advection} = \vec{u}(\vec{x},t)C(\vec{x},t) \\ \vec{j}_{diffusion} = -D\vec{\nabla}C(\vec{x},t) \\ \vec{j}_{pesanteur} = -w_S C(\vec{x},t) \end{cases} \quad (3.3)$$

où \vec{x} est le vecteur position, $C(\vec{x},t)$ est la concentration à la position \vec{x} à l'instant t , $\vec{u}(\vec{x},t)$ est la vitesse du fluide à la position \vec{x} à l'instant t , D est le coefficient de diffusion et w_S est la vitesse de sédimentation du type de grains étudié. On obtient donc la densité de courant totale :

$$\vec{j} = (\vec{u}(\vec{x},t) - w_S \vec{e}_y) C(\vec{x},t) - D\vec{\nabla}C(\vec{x},t) \quad (3.4)$$

Cette expression est injectée dans l'équation 3.1 afin d'obtenir l'équation d'*advection-diffusion*, ou équation de *transport* :

$$\frac{\partial C(\vec{x},t)}{\partial t} + \nabla [(\vec{u}(\vec{x},t) - w_S \vec{e}_y) C(\vec{x},t)] = \nabla (D\vec{\nabla}C(\vec{x},t)) \quad (3.5)$$

Cette équation est largement utilisée pour modéliser le transport de sédiments (Cancino et Neves, 1999; Nam *et al.*, 2009) et de nombreuses méthodes numériques ont été proposées pour résoudre cette équation que l'on classe en trois catégories : les méthodes *eulériennes*, les méthodes *lagrangiennes* et les méthodes *mixtes*.

Chacune d'elles possède des avantages et des inconvénients qui sont brièvement présentés ici afin de justifier l'emploi de la méthode lagrangienne utilisée.

Les méthodes eulériennes consistent à utiliser un maillage fixe dans le référentiel du laboratoire et à observer l'évolution des grandeurs du système au niveau de chaque point de ce maillage (Barbry *et al.*, 2000; Cherfils, 2011). Ce type de méthodes permet de simuler de vastes volumes contenant de larges quantités de grains sédimentaires. Cependant, des erreurs apparaissent lors de la discrétisation des grandeurs et induisent une diffusion numérique difficile à corriger, à moins de raffiner le maillage au point que le temps de calcul ne devienne rédhibitoire. De plus, le maillage étant figé dès le début de la simulation, il est nécessaire de calculer l'évolution du système au niveau de tous les points du maillage, même lorsque la concentration est nulle. Ce maillage pouvant aussi avoir des difficultés à résoudre des géométries complexes. Par ailleurs, ces méthodes ne peuvent représenter que des champs continus et peinent donc à représenter certains phénomènes qui sont très localisés par nature, comme par exemple la floculation. Le seul moyen de les représenter est de faire apparaître des termes supplémentaires dans les équations, ce qui les complexifie et dont les coefficients sont souvent empiriques.

Au contraire, les méthodes lagrangiennes suivent les grains sédimentaires au cours de leur déplacement ce qui implique que le maillage s'adapte automatiquement aux formes de l'écoulement (Patankar et Joseph, 2001; Degond et Mas-Gallic, 1989). Le second avantage de ces méthodes est que le maillage peut n'être que partiel, c'est à dire qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer des calculs dans les zones ne contenant pas de grains sédimentaires. De plus, les phénomènes locaux peuvent être traités de manière beaucoup plus directe et les géométries complexes peuvent être traitées sans difficulté. Cependant, la gestion des conditions aux limites peut être difficile à adapter à ce type de méthodes. Aussi, de larges déformations du maillage peuvent se produire au point de réduire la précision des calculs. Ce problème peut être résolu en effectuant régulièrement des opérations de remaillage mais qui induisent alors un coût de calcul supplémentaire.

Enfin, il existe des méthodes hybrides telles que les méthodes dites *Coupled Eulerian Lagrangian* (Hans, 1999) ou la méthode appelée *Arbitrary Lagrange Eulerian* (Benson, 1992). Celles-ci tentent de rassembler les avantages des deux familles de méthodes mais il est difficile de ne pas entraîner une part des inconvénients de chacune dans l'opération. Ce genre de méthode est donc encore minoritaire.

Plusieurs auteurs ont comparé des méthodes eulériennes et lagrangiennes dans des cas spécifiques. Par exemple, Zhang et Chen (2007) étudient l'injection de particules dans un espace confiné et comparent les résultats donnés par différentes méthodes, eulériennes et lagrangiennes. Ils montrent que pour les écoulements instationnaires, les méthodes lagrangiennes sont plus appropriées car leur précision ainsi que leur temps de calcul sont très peu affectés par cet aspect instationnaire, au contraire des méthodes eulériennes.

La méthode utilisée dans ce travail fait partie de la famille des méthodes lagrangiennes sans maillage, c'est à dire qu'il n'y a aucune relation entre les nœuds de

celui-ci. À chaque instant, l'évolution d'un nœud est calculée à partir des informations des nœuds voisins mais ceux-ci pourront être différents à un instant suivant. Au contraire des méthodes lagrangiennes avec maillage où les voisins d'un nœud donné sont fixés lors de la construction du maillage et ne changent ensuite que lors des éventuelles opérations de remaillage.

La méthode utilisée dans ce travail est basée sur une méthode issue des travaux de [Gingold et Monaghan \(1977\)](#) et [Lucy \(1977\)](#) qui ont donné lieu à la méthode SPH. Une attention particulière sera portée au traitement du terme de diffusion de l'équation 3.5. La suite de ce chapitre présente la construction de cette méthode et le formalisme associé ainsi que des tests simples de validation des codes développés.

3.2 Méthodes numériques

3.2.1 Représentation intégrale et discrétisation du problème

Le champ de concentration est une fonction définie en tout point de l'espace physique. Il serait difficile de représenter cette fonction analytiquement de manière à pouvoir déterminer sa valeur en tout point de l'espace, il est donc nécessaire de discrétiser la représentation de cette fonction de manière à pouvoir la traiter numériquement tout en conservant la capacité d'évaluer sa valeur en tout point de l'espace. La méthode utilisée ici repose sur la représentation intégrale d'une fonction quelconque. En effet, la valeur de la fonction $f(x)$ au point x est égale au produit de convolution de f par une distribution de Dirac centrée en x :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x - x') dx' \quad (3.6)$$

avec :

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq x' \\ 1 & \text{si } x = x' \end{cases} \quad (3.7)$$

L'opération de discrétisation consiste à déterminer une valeur approchée de $f(x)$ à partir d'un ensemble discret de valeurs disposées de manière régulière ou non dans l'espace. Cet ensemble de valeurs discrètes est l'ensemble des particules numériques P_i définies par leurs positions x_i et leurs poids c_i qui représentent la quantité de grains sédimentaires présents dans les volumes V_i de ces particules numériques. L'approximation de la concentration en un point quelconque de l'espace se fait alors par le biais d'un produit de convolution avec un noyau de régularisation W_ε ([Koumoutsakos, 2005](#)) :

$$C(\vec{x}, t) \simeq C_a(\vec{x}, t) = \sum_i c_i(t) W_\varepsilon(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) \quad (3.8)$$

où C_a est la valeur approchée de la concentration, c_i est le poids associé à la particule numérique i et ε est un paramètre de régularisation qui définit la taille du noyau.

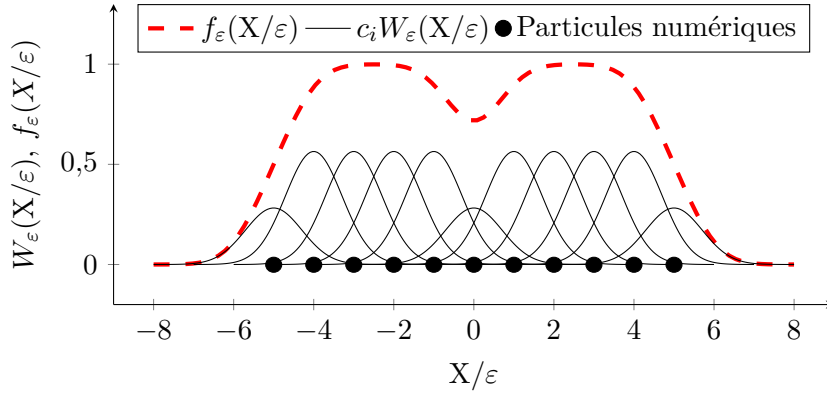


FIGURE 3.1 – Exemple de reconstruction d’une fonction à partir de particules numériques.

Une illustration de cette opération de convolution est présentée en figure 3.1 sur laquelle les particules numériques sont représentées par les cercles sur l’axe des abscisses. Les noyaux associés à chacune d’elles ainsi que leurs poids respectifs et la fonction approximée apparaissent également.

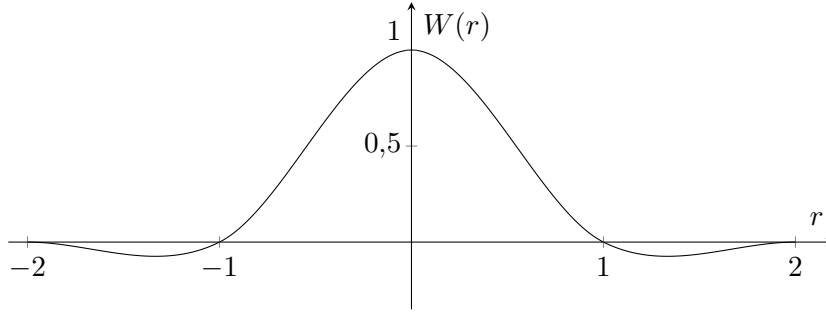
Le noyau de régularisation W_ε doit cependant avoir certaines propriétés particulières pour que cette égalité se vérifie (Degond et Mas-Gallic, 1989). Le noyau doit avoir la particularité de converger vers la distribution de Dirac lorsque ε tend vers 0, ce qui implique que la valeur approximée converge vers la valeur exacte de $f(x)$ dans ces conditions. De plus, la fonction définissant W_ε doit satisfaire :

$$\begin{cases} W_\varepsilon(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n} W(\vec{x}/\varepsilon) \\ W_\varepsilon(\vec{x}) \in L^1(\mathbb{R}^n) \\ W_\varepsilon(\vec{x}) = W_\varepsilon(-\vec{x}) \end{cases} \quad (3.9)$$

Les moments de cette fonction devant quant à eux satisfaire :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \vec{x}^\alpha W_\varepsilon(\vec{x}) d\vec{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \alpha \neq 2e_i, 1 \leq |\alpha| \leq r+1 \\ 2 & \text{si } \alpha = 2e_i, i \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (3.10)$$

De nombreux noyaux de régularisation sont recensés dans la littérature (Fulk et Quinn, 1996; Cherfils, 2011) et donnent des approximations de qualités diverses. Dans ce travail, le noyau M'_4 est utilisé car il permet d’obtenir une bonne approximation de la concentration (noyau d’ordre 3) tout en ne nécessitant qu’un nombre raisonnable de voisins car son support est compact et non nul uniquement pour

FIGURE 3.2 – Noyau de régularisation $M4'$.

$x/\varepsilon \leq 2$:

$$M_4'(r) = \begin{cases} 1 - \frac{5r^2}{2} + \frac{3r^3}{2} & \text{si } 0 \leq r \leq 1, \\ \frac{1}{2} (2-r)^2 (1-r) & \text{si } 1 \leq r \leq 2, \\ 0 & \text{si } r > 2. \end{cases} \quad (3.11)$$

où $r = \frac{|x|}{\varepsilon}$ dans un espace unidimensionnel. Dans un espace à N dimensions, le noyau est égal au produit des noyaux déterminés indépendamment dans chaque dimension. Ce noyau est représenté sur la figure 3.2.

Un dernier paramètre important de la discrétisation est le rapport $k = \frac{\varepsilon}{h}$ qui définit le rapport entre la taille du support compact du noyau et la distance entre les particules numériques. Initialement, les particules numériques sont réparties sur une grille régulière dont l'espacement du maillage est h . Plus la valeur de k est élevée et plus le nombre de particules numériques présentes dans le support du noyau de régularisation sera important. L'importance de ce nombre peut permettre d'accroître la précision mais accroît d'autant plus le temps de calcul. Cette valeur est généralement fixée à une valeur légèrement supérieure à 1 afin de limiter ce temps à une durée raisonnable.

3.2.2 Calcul de l'évolution des particules numériques

Une fois le formalisme des particules numériques établi, l'évolution de celles-ci doit être déterminée de telle sorte qu'elles représentent correctement la solution à l'équation 3.5. Le terme d'advection de cette équation est représenté naturellement par les méthodes lagrangiennes en advectant les particules numériques par le champ de vitesse du fluide corrigé par l'éventuelle contribution de la pesanteur. Comme précédemment (section 2.4), la vitesse du fluide est déterminée par interpolation en utilisant des B-Splines. Le terme de diffusion cependant est plus difficile à traiter et, là encore, plusieurs méthodes existent.

La première méthode consiste à modéliser la diffusion par un phénomène aléatoire et donne lieu à la méthode appelée *Random Walker Method* (Chorin, 1973a).

Dans ce cas, les particules numériques suivent une équation de type *Langevin* ou *Fokker-Planck*. La seconde méthode, dite PSE pour *Particle Strength Exchange*, consiste à modifier le poids des particules numériques de manière à ce que l'approximation donnée par le produit de convolution du noyau de régularisation avec celles-ci soit solution de ce terme diffusif (Degond et Mas-Gallic, 1989). Enfin, la dernière méthode qui est celle utilisée ici consiste à modéliser la diffusion par une vitesse de diffusion qui vient s'ajouter à la vitesse d'advection, cette méthode est donc à poids constant. Cette méthode est plus simple à mettre en œuvre et s'adapte mieux à une diffusion anisotrope et non uniforme. Cependant, son principal défaut est qu'elle nécessite des opérations de remaillage plus fréquentes puisque les particules vont se regrouper ou bien s'éloigner au risque de ne plus satisfaire la condition 3.10. Cette opération de remaillage sera détaillée en 3.2.4.

La vitesse de diffusion est déterminée en transformant le terme de diffusion de l'équation 3.5 en un terme d'advection par l'application d'une loi de Fick :

$$-\nabla \left(D \vec{\nabla} C(\vec{x}, t) \right) = \nabla \left(\vec{u}_d(\vec{x}_i, t) C(\vec{x}, t) \right) \quad (3.12)$$

où $\vec{u}_d(\vec{x}_i, t)$ est la vitesse de diffusion définie par l'expression :

$$\vec{u}_d(\vec{x}_i, t) = -\frac{D \vec{\nabla} C}{C} \quad (3.13)$$

On retrouve ainsi une loi de Fick reliant le courant d'une grandeur à son gradient, ce qui correspond bien à un problème de diffusion. Cependant, la concentration $C(\vec{x}, t)$ n'est pas directement accessible durant le calcul et doit être approchée grâce à l'équation 3.8. Il faut donc approcher u_d par :

$$\vec{u}_d(\vec{x}, t) \approx -D(\vec{x}, t) \frac{\vec{\nabla} C_a(\vec{x}, t)}{C_a(\vec{x}, t)} \quad (3.14)$$

L'évolution des particules numériques obéit finalement au système :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{u}(\vec{x}_i, t) + \vec{u}_d(\vec{x}_i, t) \\ \frac{dc_i}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Dans cette méthode les particules numériques sont donc gouvernées par deux flux : un flux advectif et un flux diffusif. Par ailleurs, le terme diffusif étant de la forme $\vec{\nabla} C_a(\vec{x}, t)/C_a(\vec{x}, t)$, la valeur maximale de la concentration n'affecte pas le calcul et nous parlerons dans la suite de concentration normalisée qui sera comprise entre 0 et 1 à l'état initial.

3.2.3 Calcul du gradient de concentration

D'après les équations précédentes, la détermination du terme de diffusion nécessite le calcul du gradient de la concentration C aux positions des particules. Or,

n'ayant pas accès directement à la concentration C mais seulement à son approximation C_a obtenue par l'étape de discrétisation présentée en 3.2.1, il n'est possible que d'obtenir une approximation de ce gradient : $\vec{\nabla}C \simeq \vec{\nabla}C_a$. Celui-ci est déterminé de la même manière que C_a , en cherchant à estimer la valeur de la fonction $g(x) = \vec{\nabla}C(x)$:

$$\nabla g(x) = \int_{\Omega} [\nabla g(r)] \times W(r) d\Omega \quad (3.16)$$

or :

$$[\nabla g(r)] \times W(r) = \nabla [g(r) \times W(r)] - g(r) \times \nabla W(r) \quad (3.17)$$

d'où :

$$\nabla g(x) = \int_{\Omega} \nabla [g(r) \times W(r)] d\Omega - \int_{\Omega} g(r) \times \nabla W(r) d\Omega \quad (3.18)$$

En appliquant le théorème de la divergence (ou théorème de *Green-Ostrogradski*) à la première intégrale du second membre, on obtient :

$$\nabla g(x) = \int_{\sigma_{\Omega}} g(r) \times W(r) d\sigma - \int_{\Omega} g(r) \times \nabla W(r) d\Omega \quad (3.19)$$

Or, si le support d'intégration n'est pas compact, la surface englobant ce support se situe à une distance infinie et $W(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$ de part la condition 3.10. De même, si le support d'intégration est compact, la même condition impose que $W(r) = 0$ sur toute la surface englobant le support d'intégration. Dans les deux cas, la première intégrale du second membre est nulle.

Enfin, la condition 3.9 imposant que $W(x - x') = -W(x' - x)$ permet d'écrire :

$$\nabla g(x) = \int_{\Omega} g(r) \times \nabla W(r) d\Omega \quad (3.20)$$

Pour cette étape, un noyau quadratique est utilisé à la place du noyau M'_4 :

$$\tilde{W}(r) = \alpha_D \left(\frac{3}{16} r^2 - \frac{3}{4} r + \frac{3}{4} \right), \text{ si } 0 \leq r \leq 2 \quad (3.21)$$

avec $r = \frac{\|\vec{x}\|}{\varepsilon}$, $\vec{x} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ où $\Delta x = (x - x_i)$, $\Delta y = (y - y_i)$ et $\Delta z = (z - z_i)$, $\alpha_D = 2/(\pi\varepsilon^2)$ en 2D ou $\alpha_D = 5/(4\pi\varepsilon^2)$ en 3D et ε le domaine d'influence du noyau. Avec ce noyau, l'estimation de $C(\vec{x})$ est simplement $C_a(\vec{x}) = \sum_i c_i \tilde{W}(\vec{x} - \vec{x}_i)$.

Ce choix est fait dans un désir d'optimisation du temps de calcul car le calcul du gradient est effectué très souvent. Or, le noyau choisi peut s'exprimer selon une unique équation sur tout son support, contrairement au noyau M'_4 qui est divisé en deux intervalles.

La dérivation de ce noyau \tilde{W} selon r donne :

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} = \alpha_D \frac{3}{4} \left(\frac{r}{2} - 1 \right), \text{ si } 0 \leq r \leq 2 \quad (3.22)$$

Ainsi, en utilisant le fait que $\partial \tilde{W} / \partial x = (\partial \tilde{W} / \partial r)(\partial r / \partial x)$ et $\partial r / \partial x = x/r$, l'estimateur du gradient au niveau d'une particule numérique A s'écrit :

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{3\alpha_D}{4} \sum_j c_j \left(\frac{r}{2} - 1 \right) \frac{\Delta x_{ij}}{r} \quad (3.23)$$

où la somme porte sur toutes les particules numériques dont la distance au point \vec{x} est inférieure à $2h$. En pratique, le calcul nécessite l'estimation de $(\partial C / \partial x_i) / C$, ce qui permet de simplifier l'expression par $3\alpha_D/4$ et l'expression est donc identique en 2D ou en 3D.

Cette méthode d'estimation du gradient de la concentration est une étape cruciale pour la résolution du terme de diffusion et sera très souvent mise en œuvre au cours du calcul de l'évolution de la concentration. Ainsi, deux optimisations sont mises en place afin de limiter le temps de calcul qui permettent de limiter le nombre de particules numériques à parcourir.

La première optimisation consiste à remarquer que pour calculer l'évolution des particules numériques, le gradient de concentration $(\partial C / \partial x_i) / C$ n'a besoin d'être estimé qu'aux positions \vec{x}_i des particules. Lors du calcul du gradient à la position \vec{x}_i de la particule i , il est nécessaire de parcourir toutes les particules j dont la distance à la particule i est $r \leq 2h$. Ainsi, pour calculer le gradient au niveau de la particule i , il faut calculer la contribution ∇c_{ij} provenant d'une particule j telle que :

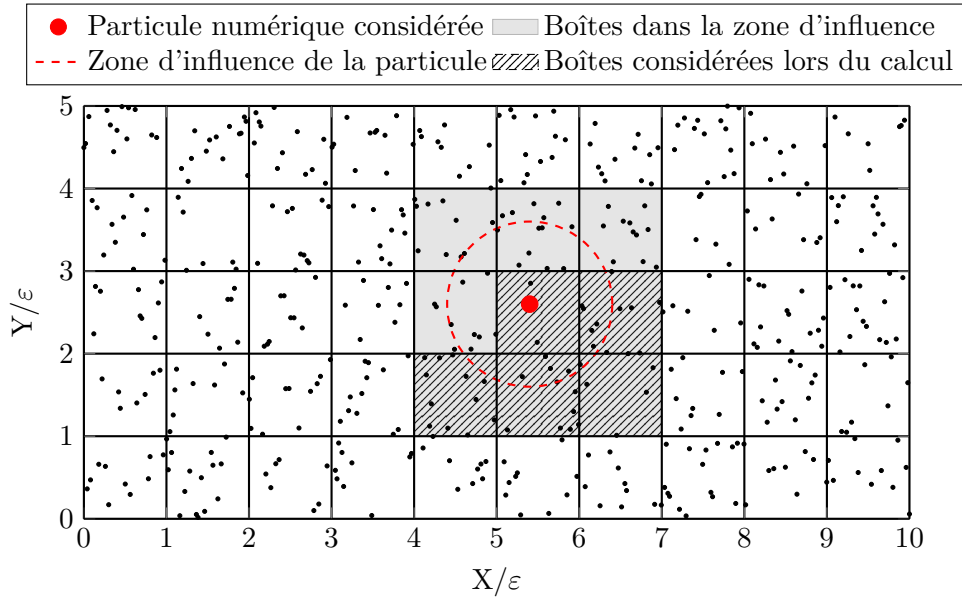
$$\nabla c_{ij} = c_i \left(\frac{r}{2} - 1 \right) \frac{\Delta x_{k_i \rightarrow j}}{r} \quad (3.24)$$

Cependant, la contribution de la particule i au niveau de la particule j sera quasi identique. Seul c_j devra prendre la valeur de c_i et $\Delta x_{k_i \rightarrow j}$ sera égal à :

$$\Delta x_{k_j \rightarrow i} = -\Delta x_{k_i \rightarrow j} \quad (3.25)$$

Il est donc possible de ne parcourir que la moitié des particules nécessaires à cette estimation et d'ajouter directement la contribution appropriée aux deux particules considérées, ce qui permet un gain de temps de calcul sur cette étape d'estimation de $\vec{\nabla} C / C$ d'environ 40%.

La seconde optimisation concerne la manière de parcourir les particules numériques. En effet, le calcul d'une approximation de la concentration ou bien du gradient de cette concentration au niveau de la position \vec{x}_i de la particule i nécessite l'obtention des informations portées par les particules voisines se trouvant dans un rayon donné. Ceci est dû à l'utilisation d'un noyau à support compact qui assure que la contribution des particules numériques est nulle au delà d'une certaine distance du point \vec{x}_i . Cependant, la détermination de ces voisines peut être une opération

FIGURE 3.3 – Illustration de la mise en place du *treecode*.

coûteuse si l'on parcourt toutes les particules pour vérifier si elles se trouvent ou non à l'intérieur du support. Une telle opération aurait une complexité en $\mathcal{O}(n^2)$, ce qui peut rapidement poser problème lorsque la simulation comporte un grand nombre de particules numériques. Afin de minimiser le temps de calcul, l'algorithme *treecode* (Simpson, 1995) est utilisé. Cet algorithme consiste à définir une grille cartésienne dans le domaine contenant les particules dont le côté d'une maille (appelée *boîte*) est égal au rayon du domaine d'influence du noyau (en rouge sur la figure 3.3). Chaque boîte se voit ensuite attribuer un ensemble d'indices permettant d'identifier quelles particules sont à l'intérieur de ces boîtes. Ainsi, il n'est nécessaire de parcourir que les particules dont les indices sont stockés dans la même boîte que la particule i ou bien dans l'une des boîtes immédiatement adjacentes ce qui assure que le nombre de particules parcourues est proche du nombre de particules qui sont à l'intérieur du support du noyau. La complexité de la détermination des particules voisines est alors en $\mathcal{O}(n \log n)$, ce qui permet un gain notable en temps de calcul. De plus, une fois que cette méthode est associée à l'optimisation précédente, toutes les boîtes voisines n'ont pas besoin d'être parcourues pour chaque particule numérique mais seulement la moitié des boîtes voisines et la boîte dans laquelle se trouve la particule considérée. Ainsi, seules les boîtes rayées sur la figure 3.3 doivent être parcourues pour déterminer le gradient au niveau de la particule rouge car les contributions des particules présentes dans les autres boîtes voisines (en gris) ont déjà été prises en compte lors du calcul du gradient au niveau des particules numériques présentes dans ces boîtes.

3.2.4 Méthode de remaillage

Pour des raisons de stabilité de calcul, il est préférable qu'il n'y ait pas de vide entre les particules numériques ou bien de chevauchements de particules excessifs. Cette condition de recouvrement provient de la fonction utilisée pour estimer le champ de concentration à partir des particules numériques qui ne prend en compte que les particules dans un rayon donné. Ainsi, lorsque les particules ne sont pas correctement ordonnées, la condition (3.10) n'est plus vérifiée localement. En effet, l'évolution naturelle de ces particules au cours des différentes itérations du calcul ne garantissent pas cette condition. De plus, la vitesse de diffusion introduite précédemment tend à éloigner ces particules les unes des autres, et donc à créer des espaces vides.

Pour résoudre ce problème, une étape de remaillage est introduite (Jollès et Huberson, 1990; Chaniotis *et al.*, 2002; Beaudoin *et al.*, 2003). Elle consiste à projeter les particules de calcul sur une grille régulière satisfaisant la condition de recouvrement. Cette grille est construite de sorte que les particules soient espacées d'une distance h dans chaque direction de l'espace. Une nouvelle particule est placée en chaque nœud de cette grille et son poids sont déterminés en utilisant le noyau $M'_4(u)$. Le champ à la position d'une nouvelle particule i s'écrit alors :

$$C(\vec{x}_i) \simeq C_a(\vec{x}_i) = \sum_j^M \frac{c_j(\vec{x}_j)}{\varepsilon^N} \prod_{k=1}^N M'_4\left(\frac{|x_{i_k} - x_{j_k}|}{\varepsilon}\right) \quad (3.26)$$

où M'_4 est donnée en équation 3.11 et avec N le nombre de dimensions.

Ainsi le poids des nouvelles particules numériques s'écrit simplement :

$$c_i = C_a(\vec{x}_i) \varepsilon^N \quad (3.27)$$

Dans cette étude, une étape de remaillage est effectuée après chaque itération de transport de particules dont le pas de temps est déterminé à partir de deux critères qui permettent d'assurer que l'étape de remaillage aura bien l'effet escompté. En effet, si les particules numériques s'éloignent trop les unes des autres au cours d'une itération, le processus de remaillage ne permettra pas de reconstruire un champ de concentration continu, mais fera apparaître des îlots de concentration, ce qui n'a pas de sens physique.

Ces critères déterminant le pas de temps Δt s'écrivent :

$$\Delta t = \min\left(\frac{h^2}{\nu}, \frac{h}{u_{max}}\right) \quad (3.28)$$

où h est la taille d'une particule et u_{max} la vitesse maximale de l'écoulement dans la zone où les particules sont transportées.

3.2.5 Traitement des conditions aux limites

L'introduction de frontières dans le domaine de calcul est à prendre en compte dans la résolution de l'évolution des sédiments. De manière générale, ces frontières peuvent avoir plusieurs effets :

- la frontière impose un flux de matière à son niveau, ce qui implique que le gradient de concentration est fixé à une valeur spécifique au niveau de la frontière, on parle alors de *condition de Neumann*.
- la frontière impose une valeur arbitraire à la solution, on parle alors de *condition de Dirichlet*.
- la frontière impose à la fois un flux de matière et une valeur spécifique à la solution à son niveau, on parle alors de *condition de Cauchy*.

Le traitement de manière générique des frontières de formes arbitraires en méthodes particulières est un problème difficile. Plusieurs méthodes permettent de représenter ces frontières et l'on peut les classer en quatre catégories.

La première consiste à créer des particules numériques supplémentaires au-delà de la frontière, malgré l'absence de matière dans cette zone. Ces particules numériques, dites *particules fantômes* ou *particules miroir*, sont les images miroir selon la perpendiculaire à la frontière des autres particules numériques. Une fois ces nouvelles particules créées, aucune modification des méthodes présentées précédemment n'est nécessaire. Ce type de méthodes est très adapté aux frontières planes et aux angles droits mais est très difficilement applicable à une géométrie courbe par exemple. Cependant, de nombreux travaux utilisent des méthodes de ce type (Libersky *et al.*, 1993; Colagrossi et Landrini, 2003; Oger *et al.*, 2006) et certaines adaptations pour les formes courbes permettent une application à des formes complexes (Schechter, 2012).

La seconde consiste à remplacer les frontières par un ensemble de particules numériques, dites *particules de frontières*, dont toutes les caractéristiques sont fixées arbitrairement suivant la géométrie à représenter et pouvant être fixes ou mobiles (Chen, 2002; Monaghan *et al.*, 2003). Une fois ces particules créées, les méthodes particulières ne nécessitent pas d'autre modification. Ce type de méthodes implique cependant un surcoût de calcul pouvant être important puisqu'un nombre important de particules numériques de frontières peuvent être nécessaires pour représenter des géométries complexes, particulièrement en 3D. Ces méthodes souffrent par ailleurs de problèmes similaires aux particules fantômes dans le cas de frontières courbes.

La troisième classe de méthodes consiste à imposer des forces, la plupart du temps répulsives, au niveau des frontières dont l'amplitude est fonction de la distance à la frontière (Monaghan et Kajtar, 2009). Cette méthode semble donner de bons résultats en SPH pour des frontières complexes.

Enfin, la dernière classe de méthode consiste à calculer directement la contribution de la frontière au niveau de chaque particule numérique, sans devoir en créer de nouvelles (Kulasegaram *et al.*, 2004). Cette méthode semble la plus prometteuse puisqu'elle a la possibilité de s'affranchir de toutes les limitations des méthodes pré-

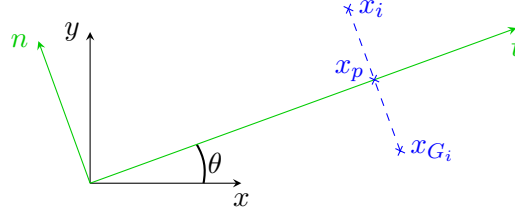


FIGURE 3.4 – Schéma de projection d'une particule fantôme en x_{G_i} à partir d'une particule numérique située en x_i par rapport à une paroi située sur l'axe t .

cédentes. Elle est cependant la plus complexe à mettre en œuvre et peu de travaux l'on mise en pratique à l'heure actuelle.

Dans le travail présenté ici, les frontières sont uniquement planes et composées d'angles droits. Par ailleurs, seule la condition de Neumann permettant de modéliser une paroi imperméable est nécessaire. Ainsi, le choix d'utiliser une méthode de particules fantômes semble naturel du fait de la simplicité de son implémentation et de la restriction à des cas simples de l'étude désirée. Ces particules fantômes sont créées pour toutes les particules numériques dont la distance à la paroi est inférieure à 3ε , celles étant au-delà de cette distance n'étant pas directement influencées par la frontière. Les positions des particules fantômes sont telles que :

$$\vec{x}_{G_i} = 2\vec{x}_p - \vec{x}_i \quad (3.29)$$

où \vec{x}_i est la position de la particule numérique i , \vec{x}_p est la position de la projection de \vec{x}_i sur la frontière et \vec{x}_{G_i} est la position de la nouvelle particule fantôme (figure 3.4). Le poids c_{G_i} associé à la particule fantôme est le même que celui de la particule numérique miroir ce qui permet d'annuler naturellement le gradient de concentration au niveau de la paroi. Un traitement particulier doit être effectué au niveau des angles car la symétrie par rapport aux paroi de part et d'autre d'un angle ne permet pas de construire des particules fantômes dans cette zone (figure 3.5a). Pour remédier à ce problème, les symétries par rapport aux paroi de part et d'autre de l'angle considéré sont effectuées et sont suivies par une symétrie centrale par rapport au sommet de l'angle. Cette dernière symétrie permet de combler le trou au niveau de l'angle et assure la présence de particules fantômes dans toutes les zones nécessaires au bon déroulement du calcul (figure 3.5b). Les figures 3.6a et 3.6b présente un calcul de concentration et de gradient de concentration d'une distribution gaussienne 2D confinée par quatre parois. La solution est discrétisée en 10000 particules numériques. Cette méthode permet bien d'annuler le gradient au niveau des parois et donc une bonne modélisation de la condition d'imperméabilité de celles-ci. Enfin, le terme de gravité est négligé lorsqu'une particule numérique est à moins de $\varepsilon/2$ de la frontière du bas.

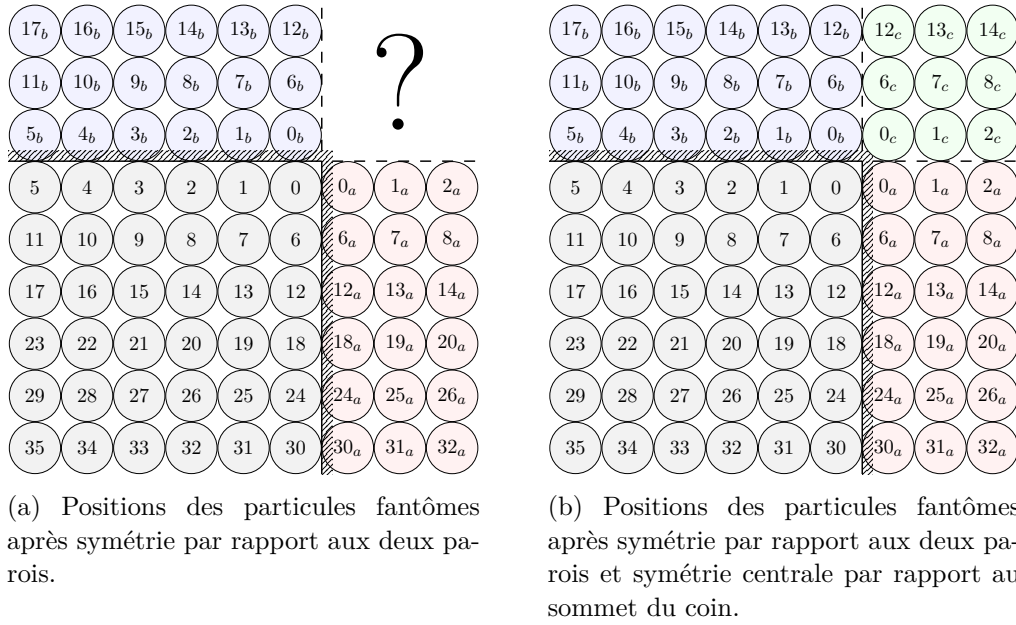


FIGURE 3.5 – Schéma de positionnement des particules fantômes au niveau des frontières droites et des coins.

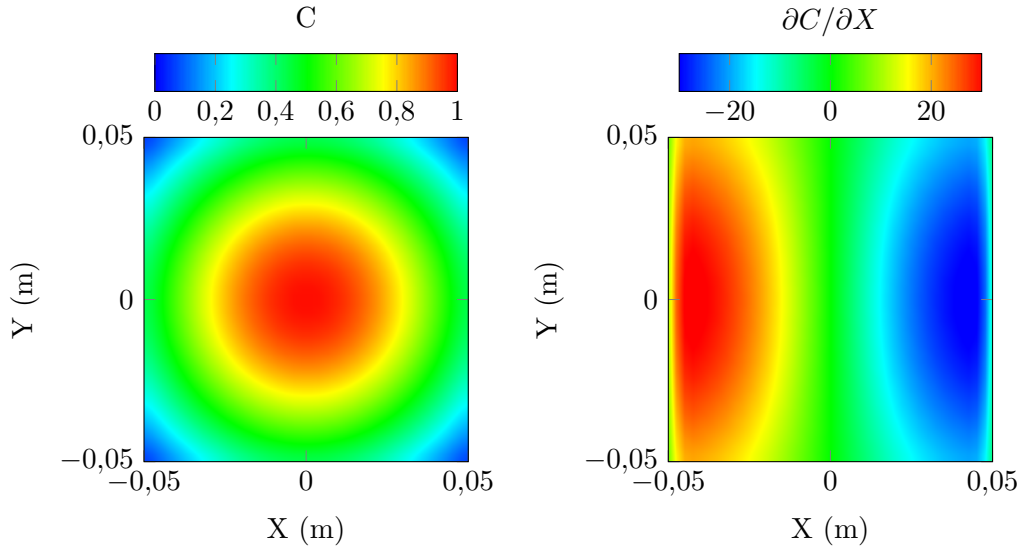


FIGURE 3.6 – Résultats de concentration et de gradient de concentration déterminés grâce à la méthode particulaire proche de parois imperméables.

3.2.6 Traitement de la turbulence

Comme précédemment, l'interpolation du champ de vitesse au niveau d'une particule numérique est effectuée à partir du champ LES filtré. L'effet des petites échelles de sous-maille est donc perdu. Jusqu'ici, la méthode particulière présentée n'a pas pris en compte cet effet de turbulence de sous-maille. À cette échelle, la turbulence est modélisée par une diffusion venant s'ajouter à la diffusion moléculaire. Dans le cadre d'une modélisation par LES, le coefficient de dispersion turbulente D_t est exprimé à partir de la viscosité turbulente ν_t dont la valeur est déterminée par le code **Thétis** :

$$D_t = \frac{\nu_t}{Sc_t} \quad (3.30)$$

où Sc_t est le nombre de Schmidt turbulent. Ce coefficient permet d'ajuster la dispersion turbulente en fonction de divers paramètres concernant les particules (Tominaga et Stathopoulos, 2007). Sa valeur est généralement comprise entre 0,5 et 1 et doit être déterminée empiriquement. Dans notre étude, aucune comparaison expérimentale ne permet de le fixer précisément. Une valeur de $Sc_t = 1$ est choisie au risque que l'effet de la turbulence de sous-maille soit légèrement surestimé.

Ce nouveau coefficient de diffusion vient simplement s'ajouter au coefficient de diffusion D précédent et cette nouvelle dispersion est traitée de la même manière que présentée précédemment.

3.3 Validation

La méthode particulière consiste en un terme d'advection et un terme diffusif. Le second terme, du fait de l'utilisation de la méthode de vitesse de diffusion, est finalement intégré au premier. Ainsi, la validation proposée ici se focalise sur le mécanisme de diffusion puisque ce phénomène est suffisamment simple pour pouvoir obtenir une expression analytique mais permet malgré tout de tester l'ensemble de la méthode, c'est-à-dire à la fois l'advection et la diffusion. Le cas le plus simple est la diffusion d'une distribution gaussienne de concentration. La solution analytique à ce problème est bien connue et provient de la solution de la diffusion d'une distribution de Dirac, c'est-à-dire une distribution initialement ponctuelle. Dans ce cas, la solution est la suivante :

$$C(t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \quad (3.31)$$

où D est le coefficient de diffusion, t est le temps, N le nombre de dimensions et r la distance entre la position de la distribution de Dirac initiale et le point considéré. Or, la distribution gaussienne initiale dont on souhaite connaître l'évolution par diffusion est de la forme :

$$C(t' = 0) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.32)$$

où σ est l'écart type de la gaussienne. Ainsi, la solution analytique de la diffusion de la distribution gaussienne est la même que pour une distribution de Dirac mais soumise à un décalage temporel tel que :

$$4Dt' = 2\sigma^2 \implies t' = \frac{\sigma^2}{2D} \quad (3.33)$$

La solution analytique est donc finalement :

$$C(t) = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sigma^N}{\left[4\pi D \left(t + \frac{\sigma^2}{2D}\right)\right]^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4D \left(t + \frac{\sigma^2}{2D}\right)}\right) \quad (3.34)$$

où un facteur de normalisation a été ajouté de telle sorte que $C(t=0) = 1$.

La validation de la méthode consiste donc en la diffusion d'une distribution gaussienne d'amplitude initiale unitaire et d'écart type $\sigma = 10^{-3}$. La solution analytique est projetée sur les positions des particules numériques afin de pouvoir effectuer une comparaison directe. La solution numérique est discrétisée en particules de $10^{-4} m$. Le coefficient de diffusion est fixé à $D = 10^{-5}$ et le pas de temps à $dt = 10^{-4} s$ avec une étape de remaillage à chaque pas de temps. Le calcul est effectué en $2D$ et $3D$.

Les figures 3.7a et 3.7b présentent les distributions numériques et analytiques à $t = 0 s$ et $t = 0,25 s$ et montrent la bonne adéquation de la méthode par rapport à la solution analytique. La figure 3.9 montre l'évolution de l'erreur de norme L_2 de la solution numérique par rapport à la solution analytique en $2D$ et $3D$. L'évolution de cette erreur se stabilise rapidement dans les deux cas à une valeur faible. On remarque que l'erreur est plus faible dans le cas tridimensionnel que dans le cas bidimensionnel car celle ci se répartit sur un plus grand nombre de particules numériques. La méthode particulière permet donc bien de modéliser le processus de diffusion d'une distribution de sédiments.

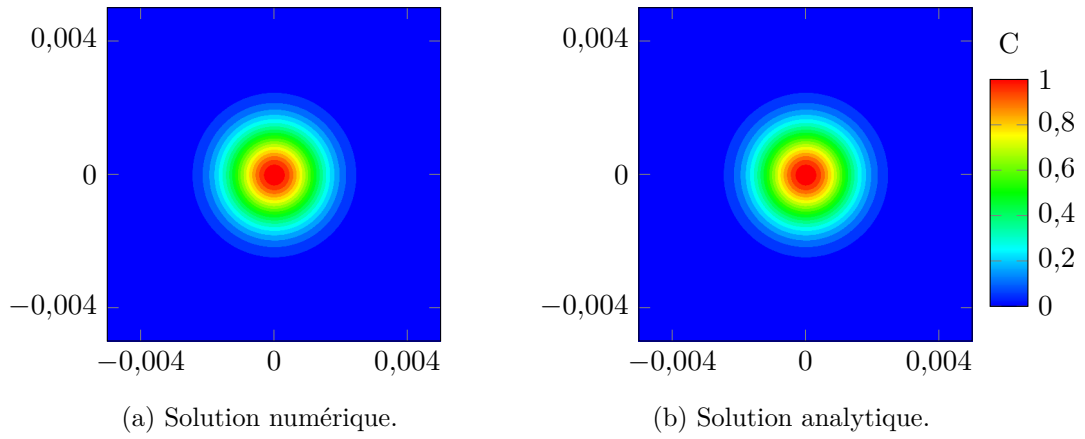
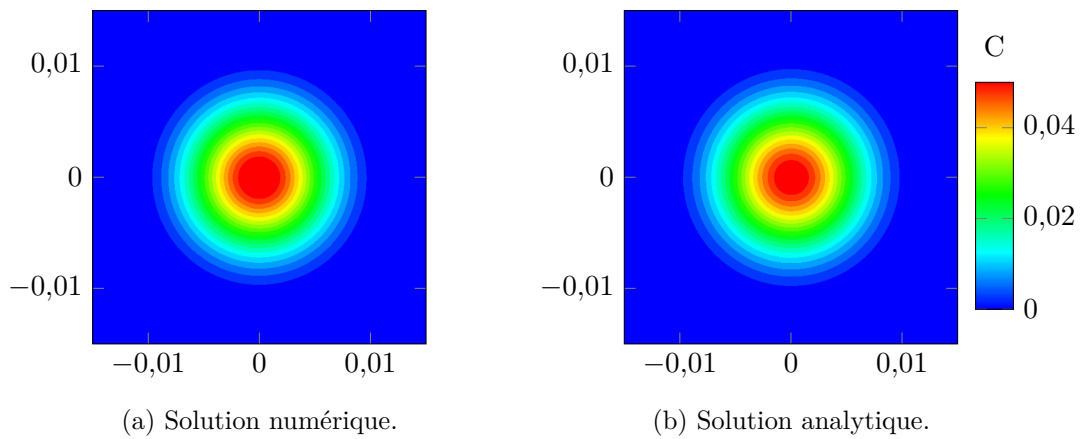


FIGURE 3.7 – Champs de concentration numérique et analytique initiaux.

FIGURE 3.8 – Champs de concentration numérique et analytique finaux à $t = 0.25$ s.

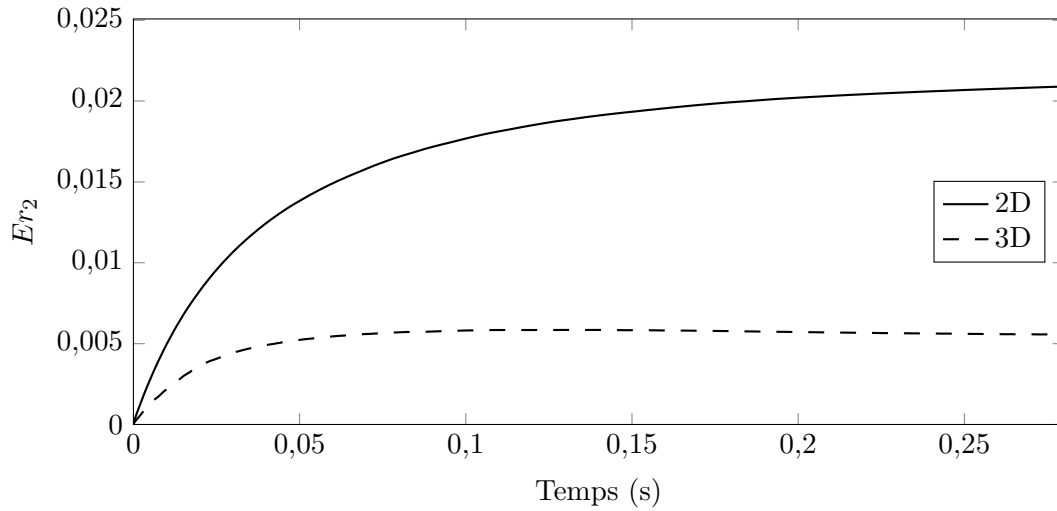


FIGURE 3.9 – Évolution de l'erreur de norme L_2 de la solution numérique par rapport à la solution analytique de la diffusion.

3.4 Conclusion

La méthode particulière présentée dans ce chapitre est une méthode numérique permettant la modélisation du transport d'une concentration en sédiments. L'équation de transport résolue (équation 3.5) est simple et ne prend en compte que l'advection de la concentration en grains sédimentaires par le courant, la gravité ainsi que la dispersion induite soit par les chocs entre grains sédimentaires soit par la turbulence de sous-maille. Les conditions aux limites sont traitées de manière simple et ne permettent de gérer correctement que des frontières planes, ce qui est le cas dans le cadre du projet [ANR Mascaret](#) puisque les simulations ne concernent que les études en canaux. La résolution de l'équation de transport se fait selon un schéma de Runge-Kutta 4, ce qui assure la précision souhaitée.

Les codes de calcul ont été optimisés au niveau algorithmique, notamment pour la recherche des particules voisines (section), et informatique par une parallélisation de l'ensemble du processus ainsi qu'une désynchronisation des entrées-sorties. Celle-ci consiste à effectuer les entrées-sorties en même temps que les calculs, c'est-à-dire que les entrées nécessaires à une itération, telles que la lecture du champ de vitesse par exemple, se font en même temps que le calcul de l'itération précédente. De même, les sorties d'une itération, telles que l'écriture du résultat, se font en même temps que le calcul de l'itération suivante. Ceci permet d'utiliser au mieux à la fois les capacités de calcul des machines utilisées mais aussi les capacités de transfert depuis ou vers le stockage qui, dans ce type d'application, peut être extrêmement chronophage. Par ailleurs, la détermination du voisinage des particules numériques a été nettement optimisée grâce à l'utilisation d'un mécanisme de tri de type *treecode* et à un parcours optimisé des particules numériques. Ces optimisations faciliteront

l'utilisation de cette méthode pour l'étude des phénomènes de transport dans le cadre de ce projet. Les résultats obtenus lors de l'application de cette méthode au mascaret sont décrits dans le chapitre 6.

Méthode des moments

Sommaire

4.1	Introduction	81
4.2	Méthode de base	82
4.3	Développement de Taylor au second ordre	90
4.4	Maillage adaptatif : division et fusion du nuage elliptique	95
4.4.1	Méthode de division	96
4.4.2	Critère de division	98
4.4.3	Fusion de particules	101
4.5	Prise en compte de la distribution interne du nuage de grains	103
4.5.1	Transformation de la base canonique à la base de Legendre	105
4.5.2	Reconstruction de la concentration à partir des moments de Legendre	106
4.5.3	Sensibilité de la reconstruction	108
4.5.4	Diffusion	112
4.5.5	Advection du nuage de grains	114
4.6	Conclusion	116

4.1 Introduction

La méthode particulière présentée précédemment a permis de réduire notablement le nombre de particules numériques tout en permettant d'obtenir un résultat précis concernant la concentration en grains dans l'écoulement. Cependant, nous cherchons d'une part à réduire encore le temps de calcul et d'autre part à étudier l'effet du cisaillement local sur l'évolution des sédiments. Une troisième méthode est donc utilisée afin de satisfaire ces deux conditions.

Cette fois-ci, nous souhaitons observer l'évolution d'une large part d'un nuage de grains, voire d'un nuage complet, tout en conservant les principales caractéristiques de la dynamique de l'écoulement. Cette dynamique sera intégrée à la méthode à travers un développement de Taylor de la vitesse du fluide autour du centre de la particule numérique considérée. Ainsi, cette particule pourra se déformer afin de s'adapter à la dynamique de l'écoulement. Pour parvenir à modéliser l'évolution de ce nuage de grains sédimentaires, nous devons dans un premier temps déterminer un moyen simple de représenter la concentration en grains sur une portion de

l'espace raisonnablement large. La représentation choisie utilise les moments de la distribution en grains, définis selon l'équation 4.1 en dimension 3 :

$$M_{x^m y^n z^o} = \int C(x, y, z) x^m y^n z^o dx dy dz \quad (4.1)$$

où $M_{x^m y^n z^o}$ est le moment d'ordre $(m; n; o)$ de la distribution et $C(x, y, z)$ l'amplitude de la distribution au point de coordonnées (x, y, z) . En effet, si l'on délimite une zone arbitraire de l'espace, il est possible de calculer les moments de la distribution à n'importe quel ordre $(m; n; o)$ et donc de capturer toutes les informations nécessaires à la représentation d'une distribution arbitraire.

Nous présenterons dans un premier temps la méthode permettant de modéliser l'évolution des moments d'une distribution puis nous valideront la méthode par plusieurs cas test simples.

4.2 Méthode de base

La méthode présentée ici est appelée *méthode des moments*. Elle s'inspire largement des *méthodes vortex* utilisées pour modéliser les écoulements. Ces techniques se basent sur les travaux de [Rosenhead \(1930 et 1931\)](#) qui présentent l'expression d'une particule tourbillonnaire, l'étude de stabilité associée ainsi qu'une première simulation faisant appel à cette méthode. Plus tard, [Chorin et Bernard \(1973\)](#) montrent que cette méthode n'est valide que lorsque le champ de vitesse des particules tourbillonnaires est lisse. Si ce n'est pas le cas, la méthode peut produire des erreurs arbitrairement grandes quel que soit le nombre de particules numériques utilisé ([Moore, 1971](#)). [Chorin \(1973b\)](#) propose ensuite une méthode faisant intervenir des particules numériques en feuillets dans la couche limite qui se transforment brusquement en disque en-dehors de celle-ci. [Dushane \(1973\)](#) confirme que la méthode de [Chorin](#) converge. Cependant, ces méthodes gardent une forme de particule numérique fixe alors que l'écoulement à modéliser peut présenter de fortes distorsions. Pour corriger cette carence, [Teng \(1982\)](#) présente une méthode permettant de déformer les particules numériques elliptiques et ainsi les adapter aux distorsions de l'écoulement. S'inspirant de ces méthodes, [Beaudoin et al. \(2002 et 2004\)](#) présentent les fondements de la méthode des moments qui permet de suivre l'évolution des moments d'un tourbillon elliptique. Dans cette méthode, chaque particule représente une distribution de vorticité à laquelle sont associés les moments :

$$M_{x^m y^n z^o}^i = \int_{\sigma_i} C(\vec{r}^i) (x' - x_i)^m (y' - y_i)^n (z' - z_i)^o dx' dy' dz' \quad (4.2)$$

où $M_{x^m y^n z^o}^i$ est le moment d'ordre m selon x , n selon y et o selon z de la particule numérique i . On définit alors l'ordre global de ces moments comme $N = m + n$. σ_i est le support géométrique de la particule i , c'est-à-dire la portion de l'espace associée à cette particule (que l'on appellera aussi *volume de contrôle*), et x_i , y_i et z_i sont les positions de la particule par rapport auxquels sont calculés les moments

	Forme initiale des particules	Évolution possible des particules
Rosenhead (1931)	•	•
Chorin (1978)	—	○
Teng (1986)	○	◐
Beaudoin <i>et al.</i> (2002)	◐	◑

TABLE 4.1 – Schématisation des formes des particules numériques employées par différents auteurs.

associés à celle-ci. Les formes des particules employées dans les différentes méthodes citées précédemment sont schématisées en tableau 4.1.

Les moments permettent de représenter une distribution quelconque dans un support quelconque. Cependant, par soucis de simplicité, nous nous intéresserons d'abord au cas d'un nuage de grains initialement circulaire et évoluant en un nuage elliptique du fait des cisaillements rencontrés sur sa trajectoire. De plus, la distribution intérieure au nuage sera considérée comme uniforme et de valeur unitaire, sauf mention contraire. Ainsi, seuls les moments d'ordre inférieurs ou égaux à 2 seront nécessaires pour décrire entièrement un tel nuage. En effet, pour une ellipse de grand axe a et de petit axe b , on a, dans le repère local formé par ses deux axes :

$$\begin{cases} M_{00} = 2\pi ab \\ M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_{xy} = 0 \\ M_{x^2} = \pi ab \frac{b^2}{4} \\ M_{y^2} = \pi ab \frac{a^2}{4} \end{cases} \quad (4.3)$$

Cependant, les moments calculés par la méthode des moments sont dans le repère global du problème et non dans le repère local de l'ellipse. Il faudra donc opérer des rotations pour passer d'un repère à l'autre. La figure 4.1 représente le repère global, matérialisé par les axes x et y en noir, et le repère local matérialisé par les axes x' et y' en vert.

L'interprétation de ces moments est intuitive : le moments M_{00} représente la surface (ou le volume dans le cas tridimensionnel) du nuage de grains, le moments M_{x^2} représente l'élongation du nuage selon la direction x , le moments M_{y^2} représente l'élongation du nuage selon la direction y et le moment M_{xy} permet de définir l'orientation du nuage par rapport à l'axe horizontal : lorsque l'angle entre Ox et Ox' est compris entre 0 et $\pi/2$ on parle d'orientation positive car le moment M_{xy}

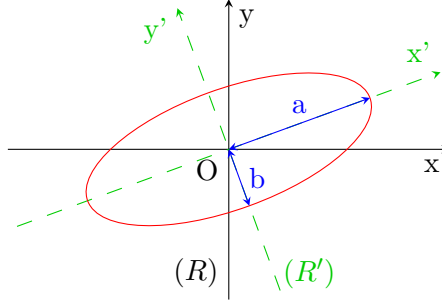


FIGURE 4.1 – Définition des repères local R' et global R d'un nuage de grains elliptique.

est positif et lorsque cet angle est compris entre $\pi/2$ et π on parle d'orientation négative car le moment M_{xy} est négatif. Dans ce cas, les moments d'ordre global $N = m + n$ impair sont tous nuls et les moments d'ordre global $N \leq 2$ suffisent à définir entièrement ce nuage particulier.

Partant de la définition des moments donnée en équation 4.2, il est possible de déterminer leur évolution temporelle en appliquant une dérivée particulière (les développements suivant sont présentés en 2D afin de réduire les écritures mais l'extension 3D est élémentaire) :

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_{x^m y^n}^i}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^m (y' - y_i)^n C(\vec{r}') dx' dy' \\
 &= \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial t} ((x' - x_i)^m (y' - y_i)^n C(\vec{r}')) dx' dy' \\
 &\quad + \int_{\sigma_i} \vec{\nabla} ((x' - x_i)^m (y' - y_i)^n \vec{u}(\vec{r}') C(\vec{r}')) dx' dy' \\
 &= \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^m (y' - y_i)^n \left(\frac{\partial C(\vec{r}')}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}(\vec{r}') C(\vec{r}')) \right) dx' dy' \\
 &\quad + m \int_{\sigma_i} (u(\vec{r}') - u(\vec{r}_i)) \left((x' - x_i)^{m-1} (y' - y_i)^n C(\vec{r}') \right) dx' dy' \quad (4.4) \\
 &\quad + n \int_{\sigma_i} (v(\vec{r}') - v(\vec{r}_i)) \left((x' - x_i)^m (y' - y_i)^{n-1} C(\vec{r}') \right) dx' dy'
 \end{aligned}$$

où \vec{r}' désigne le vecteur position de composantes (x', y') .

Un développement de Taylor à l'ordre 1 de la vitesse autour du centre de la distribution (qui correspond à la position de la particule numérique) est alors effectué :

$$\begin{cases} u(\vec{r}') = u(\vec{r}_i) + (x' - x_i) \frac{\partial}{\partial x} u(\vec{r}_i) + (y' - y_i) \frac{\partial}{\partial y} u(\vec{r}_i) + \mathcal{O}([x' - x_i]^2) + \mathcal{O}([y' - y_i]^2) \\ v(\vec{r}') = v(\vec{r}_i) + (x' - x_i) \frac{\partial}{\partial x} v(\vec{r}_i) + (y' - y_i) \frac{\partial}{\partial y} v(\vec{r}_i) + \mathcal{O}([x' - x_i]^2) + \mathcal{O}([y' - y_i]^2) \end{cases} \quad (4.5)$$

dans lequel l'apparition du gradient de la vitesse permet de prendre en compte les effets de cisaillement induits par l'écoulement. Ce développement de Taylor est ensuite injecté dans l'équation 4.4 :

$$\begin{aligned} \frac{dM_{x^m y^n}^i}{dt} = & \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^m (y' - y_i)^n \left(\frac{\partial C(\vec{r}')}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}(\vec{r}') C(\vec{r}')) \right) dx' dy' \\ & + m \int_{\sigma_i} \left[(x' - x_i) \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial x} + (y' - y_i) \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial y} \right] (x' - x_i)^{m-1} (y' - y_i)^n C(\vec{r}') dx' dy' \\ & + n \int_{\sigma_i} \left[(x' - x_i) \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial x} + (y' - y_i) \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial y} \right] (x' - x_i)^m (y' - y_i)^{n-1} C(\vec{r}') dx' dy' \end{aligned} \quad (4.6)$$

En identifiant les moments à partir de l'équation 4.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dM_{x^m y^n}^i}{dt} = & \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^m (y' - y_i)^n \left(\frac{\partial C(\vec{r}')}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}(\vec{r}') C(\vec{r}')) \right) dx' dy' \\ & + m \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial x} M_{x^m y^n}^i + m \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial y} M_{x^{m-1} y^{n+1}}^i \\ & + n \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial x} M_{x^{m+1} y^{n-1}}^i + n \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial y} M_{x^m y^n}^i \end{aligned} \quad (4.7)$$

Par ailleurs, dans le cas d'un écoulement incompressible, le dernier terme à l'intérieur de l'intégrale de l'équation 4.7 devient $\vec{u}(\vec{r}') \vec{\nabla} C(\vec{r}')$ car $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(\vec{r}') = 0$. Enfin, le terme de diffusion est dans un premier temps négligé ce qui permet de réduire l'équation à :

$$\begin{aligned} \frac{dM_{x^m y^n}^i}{dt} = & m \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial x} M_{x^m y^n}^i + m \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial y} M_{x^{m-1} y^{n+1}}^i \\ & + n \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial x} M_{x^{m+1} y^{n-1}}^i + n \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial y} M_{x^m y^n}^i \end{aligned} \quad (4.8)$$

Du fait de l'utilisation d'un développement de Taylor à l'ordre 1 de la vitesse locale de l'écoulement, cette formulation est particulièrement adaptée à l'étude de l'évolution d'un nuage de grains dans un écoulement résultant d'un cisaillement pur. Un exemple de simulation de l'évolution des moments (normalisés par la valeur initiale de M_{x^2}) d'un nuage initialement circulaire et dont la distribution interne est uniforme est présenté en figure 4.2. Le schéma d'intégration utilisé est de type Runge-Kutta 4, ce qui sera toujours le cas dans la suite, et le pas de temps est ici $dt = 0,02$ s. Ce résultat est comparé à la solution analytique qui peut être obtenue facilement dans le cas d'un cisaillement pur :

$$\begin{cases} \frac{M_{x^2}(t)}{M_{x^2}(t=0)} = 1 + 4x^2 \\ \frac{M_{xy}(t)}{M_{x^2}(t=0)} = 1 + 2x \\ \frac{M_{y^2}(t)}{M_{x^2}(t=0)} = 1 \end{cases} \quad (4.9)$$

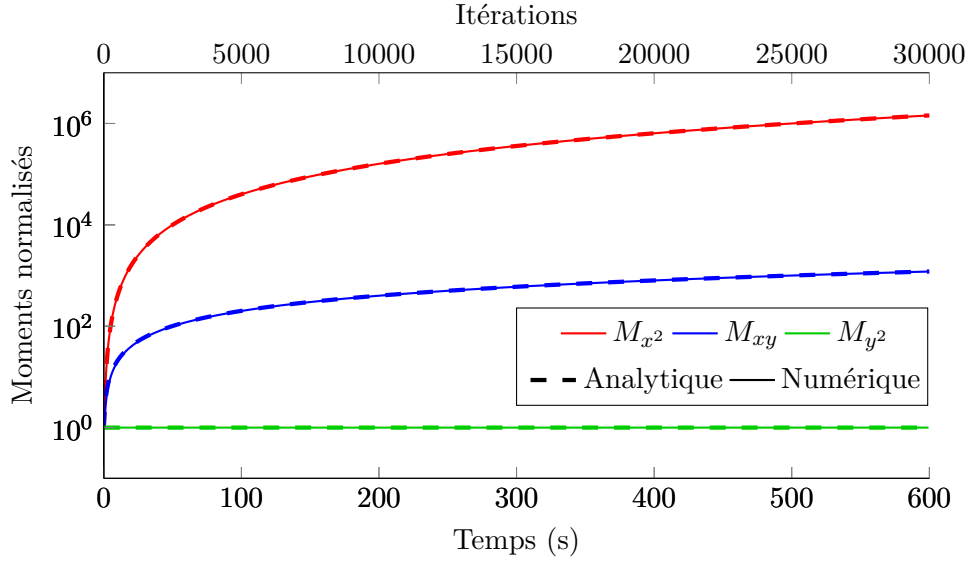


FIGURE 4.2 – Évolution des moments normalisés par leur valeur initiale d'un nuage de grains dans un écoulement de type cisaillement pur. Les traits pleins sont les résultats de la simulation et les tiretés sont les solutions analytiques.

où les moments sont tous normalisés par la valeur initiale de M_{x^2} . À $t = 0$ s, on a :

$$M_{x^2}(t = 0) = M_{y^2}(t = 0) \quad \text{et} \quad M_{xy}(t = 0) = 0 \quad (4.10)$$

car la distribution initiale est répartie uniformément selon un disque. Le moment M_{xy} ne peut pas être normalisé par sa valeur initiale nulle. Mais comme l'ordre de grandeur de ce moment est le même que les moments M_{x^2} et M_{y^2} , ce moment est aussi normalisé par la valeur initiale du moment M_{x^2} . On observe une parfaite concordance de la simulation et de la solution analytique et l'erreur relative commise après 30000 itérations de 0,02 s n'est que de $1,09 \times 10^{-3} \%$.

Cependant, le développement de Taylor à l'ordre 1 de la vitesse ne permet pas une bonne représentation du comportement du nuage de grains dès lors que l'écoulement est courbé. Ce défaut est mis en avant par la figure 4.4 représentant l'évolution des moments normalisés M_{x^2} de quatre nuages de diamètres différents, notés ϕ , calculés par la méthode particulaire et par la méthode des moments dans un écoulement de Poiseuille (équation 4.11 et figure 4.3).

$$\vec{U}(x,y) = \begin{cases} u = U_{max} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \\ v = 0 \end{cases} \quad \text{avec } U_{max} = 1 \text{ et } R = D/2 = 0,5. \quad (4.11)$$

Le pas de temps utilisé cette fois-ci est $dt = 10^{-4}$ s. Seuls les moments M_{x^2} sont représentés car les moments M_{y^2} et M_{xy} sont constants par construction car il n'y a pas de dilatation ou de contraction dans la direction verticale et qu'il n'y a pas

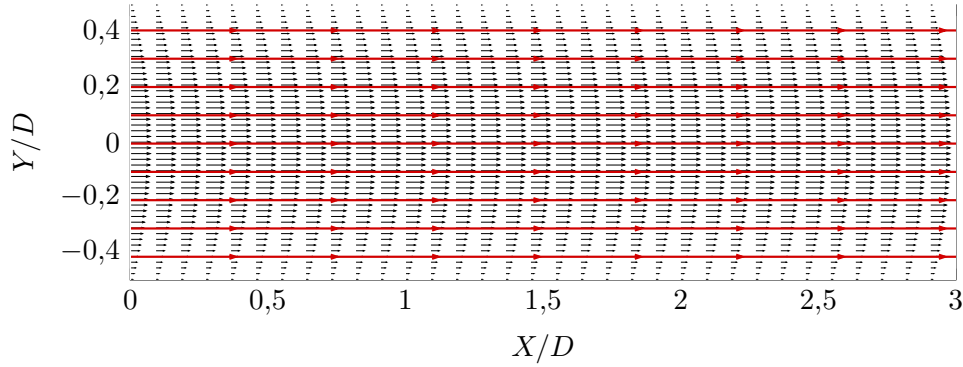


FIGURE 4.3 – Écoulement de Poiseuille.

non plus d'orientation globale du nuage. Pour la méthode particulaire, un ensemble de 1246 particules est injecté selon un disque centré en $(-2,5;0)$ à $t = 0$ puis les moments sont calculés à partir des positions de ces particules selon la formule : $M_{x^m y^n} = S_p \sum_i (x_i - \bar{x})^m (y_i - \bar{y})^n$, où (\bar{x}, \bar{y}) est le barycentre de l'ensemble des grains et S_p est la surface associée à une particule. Le nombre de 1246 particules a été choisi comme compromis entre le nombre de particules et la précision du calcul des moments. Il permet d'obtenir des erreurs inférieures à 1% sur le calcul des moments tout en conservant un temps de calcul raisonnable. Les particules sont injectées sur des rayons du disque espacés d'un diamètre de particule. De même, la distance entre deux particules consécutives sur un même rayon est fixée de telle sorte qu'elles soient séparées d'une distance proche du diamètre d'une particule numérique (figure 4.5).

On observe ainsi l'apparition d'une déviation sensible sur l'évolution des moments. Aucune évolution n'est observée sur les moments issus de la méthode des moments et toutes les courbes sont confondues en une droite d'équation $y = 1$. La comparaison de la forme du nuage reconstruit à partir de la méthode des moments à celle du nuage obtenue par la méthode particulaire fait immédiatement apparaître la cause de l'écart observé sur les moments (figure 4.5). Avec la méthode des moments le nuage ne peut pas se déformer puisque les dérivées du champ de vitesse sur l'axe $y = 0$ sont nulles. Au contraire, avec la méthode particulaire, le nuage se courbe naturellement pour suivre l'écoulement. En outre, le nuage se courbe d'autant plus que sa taille est grande alors que la méthode des moments utilisant un développement de Taylor à l'ordre 1 ne permet pas de rendre compte de l'effet de taille du nuage.

Enfin, un troisième cas test est développé, plus proche des conditions rencontrées dans l'étude d'un mascaret. Il s'agit d'un jet pulsé dans un canal dont l'écoulement est initialisé à une vitesse uniforme de $\vec{u}(x,y) = 0,04 \vec{e}_x$ m/s. Cet écoulement est généré à l'aide du code de calcul Incompact3d (Laizet et Lamballais, 2009) qui résout les équations de Navier-Stokes par *DNS* (Direct Numerical Simulation), c'est-à-dire

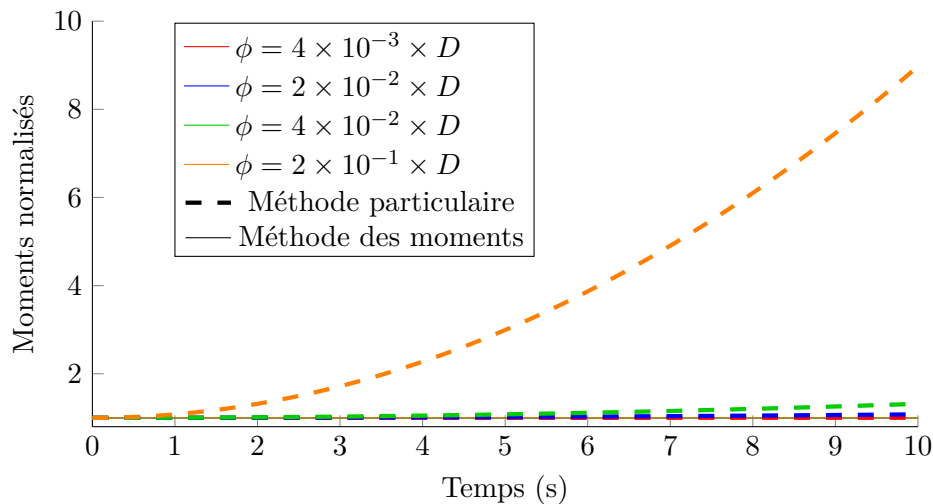


FIGURE 4.4 – Évolution du moment M_{x^2} normalisé par sa valeur initiale pour quatre nuages de diamètres ϕ différents injectés au centre d'un écoulement de Poiseuille, calculées à partir de la méthode particulaire (tiretés) et la méthode des moments utilisant un développement de Taylor à l'ordre 1 (traits pleins).

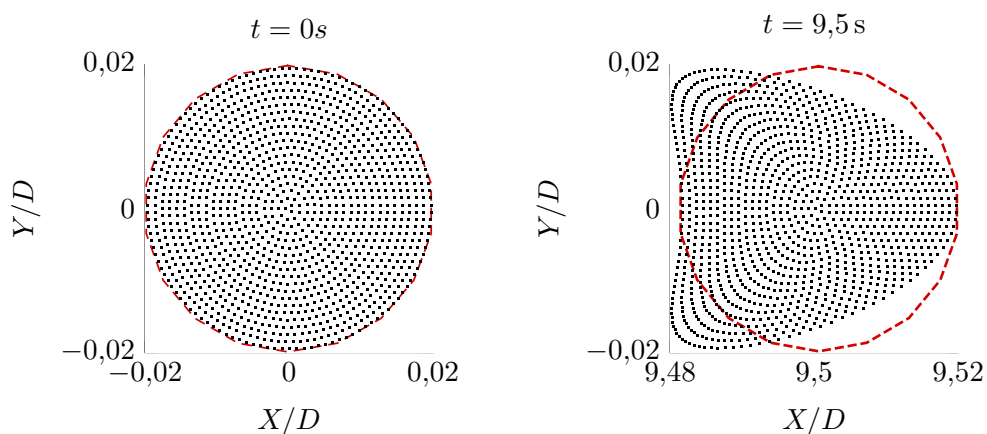


FIGURE 4.5 – Résultat issu de la méthode des moments (en rouge) comparé à celui issu de la méthode particulaire de référence à $t = 0s$ et $t = 9,5s$ lorsqu'un développement de Taylor à l'ordre 1 est utilisé. Dans ce cas, la méthode des moments ne permet aucune évolution.

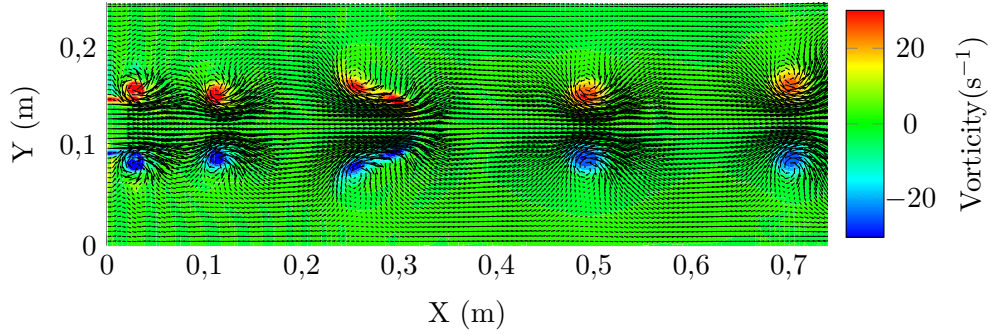


FIGURE 4.6 – Champs de vitesse (flèches) et de vorticité (fond coloré) générés par le code Incompact3d.

qu'il résout explicitement ces équations en supposant que les plus petites échelles de l'écoulement sont du même ordre de grandeur que le pas du maillage utilisé. L'écoulement généré de type *jet pulsé* permettant d'obtenir de larges structures tourbillonnaires propices au test de cette méthode et plus réaliste qu'un écoulement analytique tel que l'écoulement de Poiseuille utilisé précédemment. Pour faciliter les représentations et les interprétations, le champ de vitesse utilisé est figé à un instant arbitraire. Cette opération n'a pas de sens physique, ce qui empêche toute interprétation physique du résultat, mais est plus commode pour la validation de la méthode présentée. L'équation 4.12 présente la condition d'entrée du jet pulsé pour la composante horizontale de la vitesse, la composante verticale étant nulle. Les conditions de bords sont libre en sortie et périodiques sur les bords du canal. Le domaine de calcul est défini par les intervalles $0 \leq x \leq 0,7$ et $0 \leq y \leq 0,25$ et est discrétisés en 300 mailles selon \vec{x} et 100 mailles selon \vec{y} . La figure 4.6 représente à la fois les vecteurs du champ de vitesse ainsi que sa vorticité.

$$u(x=0,t) = \begin{cases} 0,04 + 0,16(1 + \sin(10t)) & \text{pour } 0,1 \leq y \leq 0,15 \\ 0,04 & \text{pour } y < 0,1 \text{ et } y > 0,15 \end{cases} \quad (4.12)$$

Les résultats obtenus dans cet écoulement avec la méthode des moments et la méthode particulière sont représentés sur la figure 4.7. Le pas de temps utilisé pour la simulation est $dt = 5 \times 10^{-4}$ s. Cette fois-ci, la méthode des moments permet dans l'ensemble d'obtenir une bonne approximation du résultat obtenu avec la méthode particulière. Malgré tout, une erreur importante apparaît lorsque le nuage traverse une zone fortement courbée de l'écoulement (à $t = 2,1$ s notamment). L'erreur relative atteint des valeurs de 11,46 % pour le moment M_{x2} , 10,12 % pour le moment M_{xy} et 10,44 % pour le moment M_{y2} au niveau des valeurs maximales de ces moments. Du point de vue global, les erreurs de norme L_2 sont respectivement : $9,31 \times 10^{-4}$, $1,05 \times 10^{-3}$ et $9,82 \times 10^{-4}$. Là encore, la méthode ne permet donc pas de résoudre de manière suffisamment précise la dynamique de l'écoulement, sauf dans les zones où l'écoulement est faiblement courbé vis-à-vis de la taille du nuage.

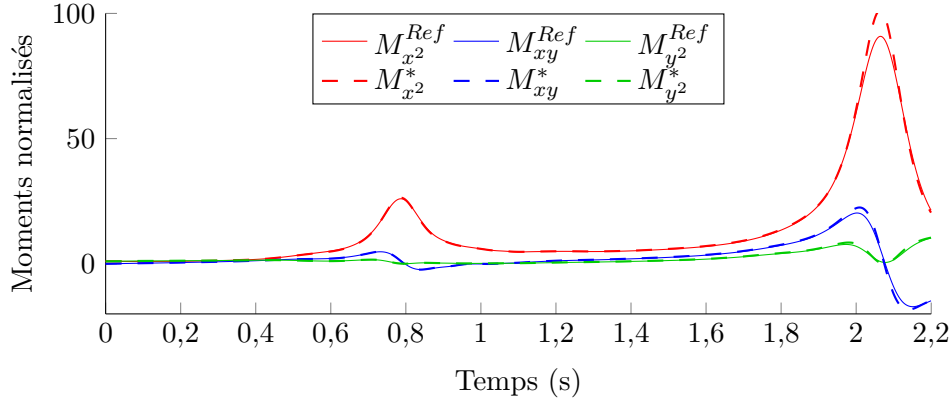


FIGURE 4.7 – Évolution des moments d'ordre 2 d'un nuage de grains dans un jet pulsé, calculés avec la méthode des moments (moments avec un exposant *) et la méthode particulaire (moments avec un exposant Ref).

Afin de solutionner la forte limitation de la méthode qui a été mise en avant ici, deux approches différentes sont proposées : la première consiste à étendre le développement de Taylor de la vitesse locale à un ordre supérieur, ce qui doit permettre de prendre en compte la courbure locale de l'écoulement. La seconde consiste à diviser le nuage elliptique en plusieurs particules numériques indépendantes et de reconstruire ensuite les moments du nuage à partir de ces particules, elle s'apparente donc à une méthode de remaillage.

4.3 Développement de Taylor au second ordre

La méthode évoquée précédemment consiste à étendre le développement de Taylor de la vitesse à un ordre supérieur. Dans ce travail, nous allons nous restreindre à l'ordre 2 car l'extension à un ordre trop élevé serait trop coûteux en terme de temps de calcul alors que l'objectif est de minimiser celui-ci. Ce nouveau développement permet de réécrire les équations pilotant l'évolution des moments grâce à la nouvelle expression du développement de Taylor :

$$\begin{cases} u(\vec{r}') = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \frac{\partial^{m+n} u(x', y')}{\partial x^m \partial y^n} \bigg|_{(x_i, y_i)} \frac{(x' - x_i)^m}{m!} \frac{(y' - y_i)^n}{n!} + \mathcal{O} \left([\vec{r}' - \vec{r}_i]^{N+1} \right) \\ v(\vec{r}') = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \frac{\partial^{m+n} v(x', y')}{\partial x^m \partial y^n} \bigg|_{(x_i, y_i)} \frac{(x' - x_i)^m}{m!} \frac{(y' - y_i)^n}{n!} + \mathcal{O} \left([\vec{r}' - \vec{r}_i]^{N+1} \right) \end{cases} \quad (4.13)$$

où N est l'ordre désiré du développement de Taylor qui est pris ici égal à 2. En repartant de l'équation 4.4 et en négligeant à nouveau le terme de diffusion, nous

obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{dM_{x^m y^n}^i}{dt} = & m \int_{\sigma_i} \left[(x' - x_i) \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial x} + (y' - y_i) \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left((x' - x_i)^2 + (y' - y_i)^2 \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial^2 u(\vec{r}_i)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\vec{r}_i)}{\partial y^2} \right) \right] (x' - x_i)^{m-1} (y' - y_i)^n C(\vec{r}') dx' dy' \\
& + n \int_{\sigma_i} \left[(x' - x_i) \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial x} + (y' - y_i) \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left((x' - x_i)^2 + (y' - y_i)^2 \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial^2 v(\vec{r}_i)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(\vec{r}_i)}{\partial y^2} \right) \right] (x' - x_i)^m (y' - y_i)^{n-1} C(\vec{r}') dx' dy'
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Nous pouvons alors identifier à nouveau les expressions des moments et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{dM_{x^m y^n}^i}{dt} = & m \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial x} M_{x^m y^n}^i + m \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial y} M_{x^{m-1} y^{n+1}}^i \\
& + n \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial x} M_{x^{m+1} y^{n-1}}^i + n \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial y} M_{x^m y^n}^i \\
& + \frac{m}{2} \frac{\partial^2 u(\vec{r}_i)}{\partial x^2} M_{x^{m+1} y^n}^i + m \frac{\partial^2 u(\vec{r}_i)}{\partial x \partial y} M_{x^m y^{n+1}}^i + \frac{m}{2} \frac{\partial^2 u(\vec{r}_i)}{\partial y^2} M_{x^{m-1} y^{n+2}}^i \\
& + \frac{n}{2} \frac{\partial^2 v(\vec{r}_i)}{\partial x^2} M_{x^{m+2} y^{n-1}}^i + n \frac{\partial^2 v(\vec{r}_i)}{\partial x \partial y} M_{x^{m+1} y^n}^i + \frac{n}{2} \frac{\partial^2 v(\vec{r}_i)}{\partial y^2} M_{x^m y^{n+1}}^i
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Dans cette nouvelle expression, le calcul du moment d'ordre global $m + n = N$ nécessite la connaissance des moments d'ordre global $m' + n' = N + 1$, ce qui pose un problème de fermeture au problème. Il est tout de même possible de connaître précisément la déformation qu'a subie le repère local du nuage lors de son advection et donc, dans le cas simple du nuage initialement circulaire et lorsque l'on néglige la diffusion, de calculer analytiquement les moments manquant afin de minimiser l'erreur (voir Annexe C.1 pour la détermination des moments grâce à une transformation géométrique).

Pour cela, une méthode d'advection du référentiel est utilisée. On suppose que l'état à tout instant $t > 0$ résulte d'une transformation géométrique de l'état initial telle que :

$$\begin{cases} \hat{x} = x + \int_0^t \frac{d\hat{x}(x, y, t')}{dt} dt' \\ \hat{y} = y + \int_0^t \frac{d\hat{y}(x, y, t')}{dt} dt' \end{cases} \tag{4.16}$$

où \hat{x} et \hat{y} sont les transformations à appliquer respectivement aux abscisses et aux ordonnées de l'état initial pour obtenir l'état à l'instant t , $d\hat{x}(x, y, t')/dt$ et

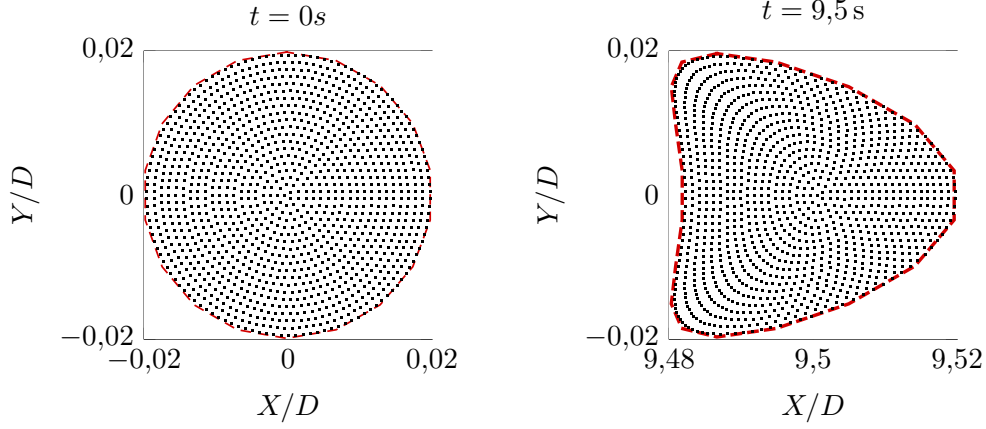


FIGURE 4.8 – Comparaison de la méthode particulaire (carrés noirs) et de la transformation du référentiel (tireté rouge) à $t = 0s$ et $t = 9,5s$.

$d\hat{y}(x,y,t')/dt$ représentent l'advection de ces transformations. En développant le terme d'advection, on obtient :

$$\begin{cases} \hat{x} = x + \int_0^t \left[\frac{\partial \hat{x}(x,y,t')}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{u}\hat{x}) \right] dt' \\ \hat{y} = y + \int_0^t \left[\frac{\partial \hat{y}(x,y,t')}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{u}\hat{y}) \right] dt' \end{cases} \quad (4.17)$$

où $\frac{\partial \hat{x}(x,y,t')}{\partial t}$ est égale au développement de Taylor de la composante horizontale de la vitesse et $\frac{\partial \hat{y}(x,y,t')}{\partial t}$ est égal au développement de Taylor de sa composante verticale. À $t = 0s$, on a donc $\hat{x} = x$ et $\hat{y} = y$ puis ensuite, pour $t > 0s$ en utilisant un développement de Taylor de la vitesse à l'ordre 2 et en l'intégrant sur l'intervalle $[0,t]$, \hat{x} et \hat{y} seront de la forme :

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = a + bx + cx^2 + dy + ey^2 + fxy \\ \hat{y}(t) = a' + b'x + c'x^2 + d'y + e'y^2 + f'xy \end{cases} \quad (4.18)$$

où les coefficients $a,b,c,d,e,f,a',b',c',d',e'$ et f' sont déterminés par la relation 4.17. Un exemple d'application de cette transformation est présenté en figure 4.8 sur laquelle sont représentés les nuages à $t = 0$ et à $t = 9,5s$ transportés dans l'écoulement de Poiseuille précédent. Cette fois-ci, le nuage calculé par la méthode des moments est bien courbé de la même manière que celui calculé par la méthode particulaire.

Ainsi, cette transformation permet de fermer l'équation 4.15 en permettant de déterminer les moments d'ordre global $N + 1$ à tout instant t . Notons que cette transformation pourrait aussi permettre de déterminer les moments d'ordre N en l'absence de diffusion. Cependant, les moments contiennent plus d'information à

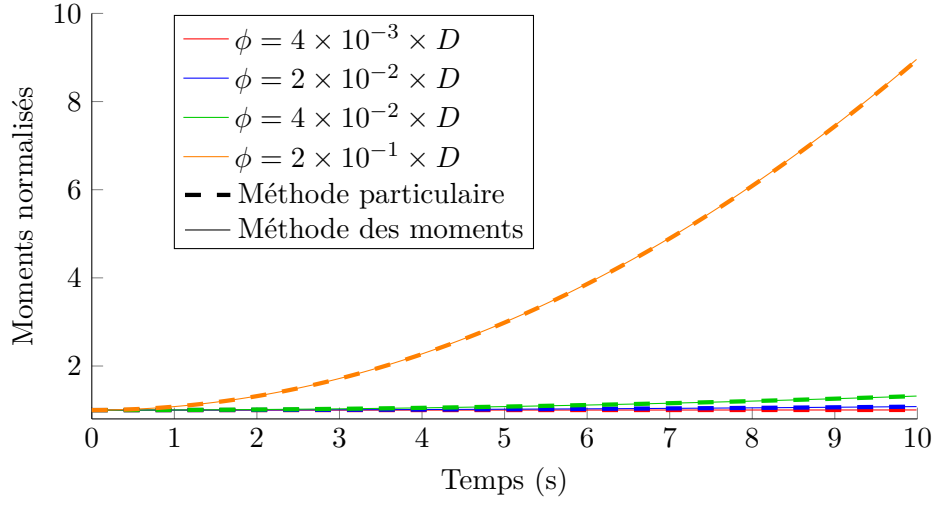


FIGURE 4.9 – Évolution du moment M_{x2} normalisé par sa valeur initiale pour quatre nuages de diamètres ϕ différents injectés au centre d'un écoulement de Poiseuille, calculé à partir de la méthode particulière (tiretés) et la méthode des moments utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2 (traits pleins).

propos de la distribution de grains à l'intérieur du nuage que la simple transformation géométrique permettant de passer de l'état initial à l'état final, ce qui est nécessaire pour tenir compte des effets de diffusion à l'intérieur du nuage.

À partir de ce nouveau développement, nous pouvons observer l'effet de la taille du nuage sur le résultat, alors que ce paramètre n'avait pas d'influence sur l'évolution des moments normalisés lorsque le développement de Taylor se faisait à l'ordre 1. En effet, plus un nuage de grains est grand et plus celui-ci va subir une déformation importante relativement à sa taille. Cet effet se comprend facilement dans le cas de l'écoulement de Poiseuille. Si la taille du nuage de grains tend vers 0, l'évolution de la vitesse du fluide dans la zone couverte par le nuage est quasi nulle et la déformation du nuage l'est donc aussi. Au contraire, pour un nuage très grand, la vitesse du fluide évolue de manière très importante du fait de son évolution quadratique et donc la déformation est elle aussi très importante. La figure 4.9 présente ainsi l'évolution des moments normalisés dans les mêmes conditions que précédemment pour plusieurs tailles de nuage. Cette fois-ci, l'effet de la taille apparaît nettement et est parfaitement reproduit par la méthode des moments.

La méthode est maintenant testée sur le cas du jet pulsé, présenté précédemment en équation 4.12 et en figures 4.6 et 4.7. Dans ce cas, la méthode de base permettait d'obtenir un résultat dont l'erreur relative était proche de 10% pour les trois moments M_{x2} , M_{xy} et M_{y2} . Le résultat obtenu grâce à l'extension du développement de Taylor à l'ordre 2 est présenté en figure 4.10. Une bien meilleure adéquation avec la méthode particulière est observée. Les erreurs relatives atteignent cette fois-ci des valeurs de 2,97% pour le moment M_{x2} , 1,6% pour le moment M_{xy} et 0,89%

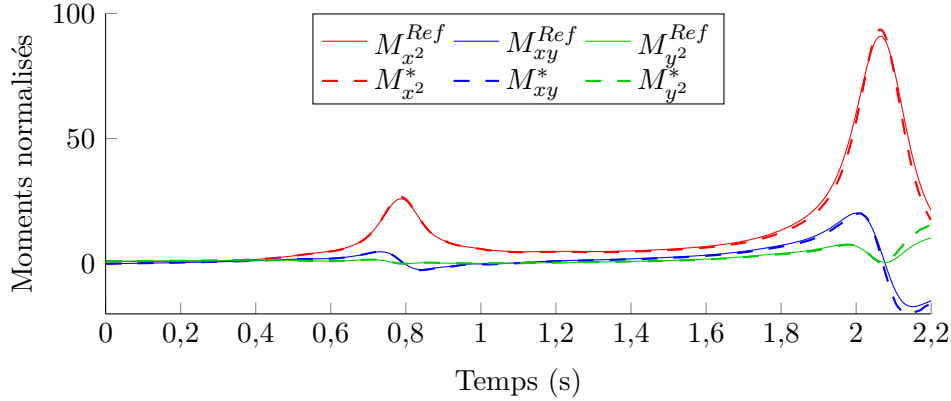


FIGURE 4.10 – Évolution des moments d'ordre 2 d'un nuage de grains dans un jet pulsé, calculés avec la méthode des moments utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2 (moments avec un exposant $*$) et la méthode particulière (moments avec un exposant $*$).

pour le moment M_{y^2} au niveau des valeurs maximales des moments. Du point de vue global, les erreurs de norme L_2 sont respectivement : $9,00 \times 10^{-4}$, $9,74 \times 10^{-4}$ et $7,34 \times 10^{-4}$, ce qui est finalement très proche des valeurs du cas où le développement de Taylor était fait à l'ordre 1. Ceci s'explique par le fait que l'amélioration observée au niveau des principaux pics est en partie compensée par des détériorations à d'autres endroits, notamment avant et après ces pics. Cette détérioration est due à la mauvaise approximation du champ de vitesse par le développement de Taylor à l'ordre 2. Le temps de calcul normalisé augmente quant à lui de 58,3 % dont 78 % est dévolu au calcul des dérivées secondes.

L'extension du développement de Taylor de la vitesse par rapport au centre de la particule représentant le nuage permet une nette amélioration de la méthode et une nette extension de son domaine d'applicabilité. Par ailleurs, cela permet de faire apparaître une propriété importante qui est la dépendance de l'évolution du nuage en fonction de sa taille. Cependant, cette méthode n'est pas exempte de défauts. Tout d'abord, le calcul des dérivées secondes nécessaires au calcul peuvent être très coûteuses en temps de calcul. Les exemples précédents sont basés sur des champs de vitesse analytiques et le calcul des dérivées est lui aussi analytique et donc immédiat. Cependant, l'application de cette méthode à des champs de vitesse issus de simulations numériques ou bien de mesures expérimentales nécessiterait le calcul des dérivées par des méthodes numériques de dérivation d'équation aux dérivées partielles. Dans notre travail, nous utilisons des méthodes de type différences finies ce qui induit un coût important pour le calcul des dérivées, notamment les dérivées secondes. Par ailleurs, l'ajout de termes supplémentaires dans l'équation induit lui aussi un allongement du temps de calcul. Le tableau 4.2 permet de comparer les temps de calcul dans différentes configurations, normalisés par les temps de calcul de la méthode particulière dans les mêmes configurations. Ces temps de calcul

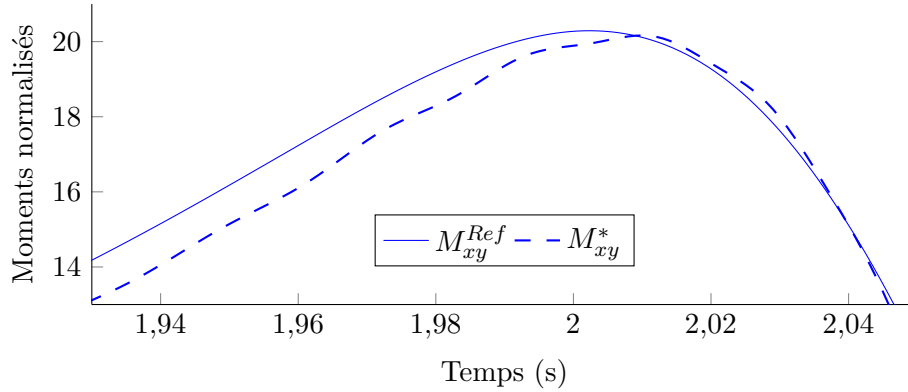


FIGURE 4.11 – Évolution du moment M_{xy} d'un nuage de grains dans un jet pulsé, calculé avec la méthode des moments utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2 (moments avec un exposant *) et la méthode particulière (moments avec un exposant Ref).

comprennent le temps de calcul des gradients et laplaciens du champ de vitesse et le temps de calcul de l'évolution temporelle des particules numériques. Tous les calculs sont effectués dans les mêmes conditions sur un seul CPU. Aussi, l'introduction de dérivées d'ordre supérieur induit une plus forte sensibilité aux imperfections du champ de vitesse. Cet effet peut être très marqué lors de l'application sur des champs numériques ou expérimentaux et limite l'utilisation de cette méthode sur de tels champs. Un exemple d'oscillations sur le moment M_{xy} dues à l'estimation des dérivées secondes par différences finies est présenté en figure 4.11. Enfin, le calcul de l'évolution des moments se fait toujours par rapport à un même point qui ne sera donc plus le centre de masse du fait de la déformation du second ordre du nuage. Il faut donc être vigilant lors de l'interprétation des moments calculés par cette méthode. Malgré tout, cette méthode peut être avantageuse car elle est théoriquement très générale. Elle n'a aucune restriction d'ordre des moments, de forme du nuage ou de distribution interne ou de type d'écoulement.

4.4 Maillage adaptatif : division et fusion du nuage elliptique

La seconde piste pouvant permettre à la méthode des moments de suivre la courbure des écoulements consiste à diviser le nuage elliptique, que nous appellerons *particule mère* dans la suite, en deux particules dites *filles*. Par analogie, cette méthode permet d'*articuler* la particule mère en son centre et donc de se courber en même temps que l'écoulement. Cette méthode est donc un raffinement local du maillage non structuré formé par les différents nuages de grains. Ceci permet de résoudre une des limitations de la méthode précédente provenant de l'utilisation d'un développement de Taylor de la vitesse autour du centre de la particule numé-

rique. En effet, la validité du développement de Taylor nécessite que l'on se place très proche du point autour duquel celui-ci est effectué. Or, lorsque la taille de la particule numérique devient non négligeable par rapport à la taille des structures de l'écoulement, ce développement ne peut rester pertinent pour prendre en compte la dynamique de l'écoulement. Pour obtenir une représentation correcte de cette dynamique, il faudrait que ce développement soit étendu à des ordres prohibitifs qui feraient apparaître un nombre de termes démesurés, ce qui n'est pas viable du point de vue numérique.

Pour cette méthode, nous nous limitons à un développement de Taylor de la vitesse à l'ordre 1 et à un nuage elliptique bidimensionnel de distribution uniforme. Cette limitation vient du fait que l'opération de division se base sur des considérations géométriques simples qui supposent que le nuage de grains conserve une forme elliptique, ce qui n'est assuré que lorsqu'un développement de Taylor de la vitesse à l'ordre 1 est utilisé. Les déformations subies par le nuage de grains ne pourront donc donner lieu qu'à un nuage elliptique dont l'angle par rapport à l'horizontal ainsi que les demi grand et demi petit axes varient. Comme nous l'avons vu précédemment, cette forme simple peut être entièrement résolue par la connaissance des moments d'ordre global $N \leq 2$. Néanmoins, du fait de la symétrie par rapport à son centre, les moments d'ordre 1 sont toujours nuls, ce qui réduit le nombre de moments nécessaires à la résolution du nuage à 4 : M_{00} , M_{x^2} , M_{xy} et M_{y^2} .

Au contraire, certaines zones de l'écoulement ne requièrent pas de raffinement. Une méthode de fusion des particules filles est donc mise en place afin que celles-ci puissent reformer la particule mère initiale une fois que la zone nécessitant un raffinement est passée.

4.4.1 Méthode de division

La méthode consiste à diviser une ellipse lorsque la taille de celle-ci devient grande par rapport à l'échelle de variation du gradient de vitesse. En effet, le développement de Taylor à l'ordre 1 de la vitesse implique que le gradient de vitesse est supposé constant dans le support de la particule. Ainsi, plus les lignes de courant instantanées sont courbées, plus l'erreur produite par la méthode est importante. La division d'une particule *mère* en deux particules *filles* évoluant ensuite indépendamment permet de réduire cette erreur (figure 4.12).

Dans un premier temps, nous devons déterminer les caractéristiques de l'ellipse *mère* que l'on souhaite diviser, c'est-à-dire son orientation et ses demi grand et petit axes. Pour cela, la matrice des moments d'ordre 2, définie en équation 4.19, est diagonalisée.

$$M_2 = \begin{pmatrix} M_{x^2} & M_{xy} \\ M_{xy} & M_{y^2} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Cette diagonalisation permet d'obtenir les moments M_{x^2} et M_{y^2} dans le repère local de l'ellipse ainsi que l'angle θ entre le repère local et le repère global. L'objectif est

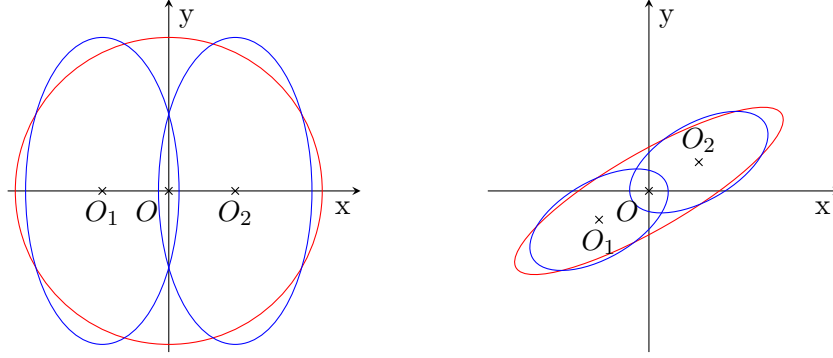


FIGURE 4.12 – Exemple de division d’une particule mère circulaire (à gauche, en rouge) et d’une particule mère elliptique (à droite, en rouge) en particules filles (en bleu).

de construire deux nouvelles particules elliptiques dont les sommes des moments d’ordre globaux $N \leq 2$ des particules *filles* par rapport au centre de la particule *mère* sont égales aux moments de même ordre de la particule *mère* par rapport à son centre (équation 4.20). Dans le référentiel local de la particule *mère*, ces conditions se traduisent par le système où les grandeurs dont l’indice est m font référence à la particule *mère* et celle dont l’indice est 1 ou 2 font référence aux deux particules *filles*. L’exposant associé aux moments indique par rapport à quel point les moments sont calculés, avec O le centre de la particule *mère*, O_1 le centre de la 1^{ère} particule *filles* et O_2 le centre de la seconde.

$$\begin{cases} M_{m_{00}}^O &= M_{1_{00}}^O + M_{2_{00}}^O \\ M_{m_{x^2}}^O &= M_{1_{x^2}}^O + M_{2_{x^2}}^O \\ M_{m_{xy}}^O &= M_{1_{xy}}^O + M_{2_{xy}}^O = 0 \\ M_{m_{y^2}}^O &= M_{1_{y^2}}^O + M_{2_{y^2}}^O \end{cases} \quad (4.20)$$

Nous avons supposé précédemment que la distribution est uniforme à l’intérieur du nuage. De ce fait, les moments d’ordre global impaire sont nuls et les moments d’ordre global pair des particules *filles* seront égaux à la moitié des moments équivalents de la particule *mère*. Aussi, nous imposons que la division se fasse dans la direction du grand axe de l’ellipse *mère* car c’est très probablement dans cette direction que la taille de l’ellipse devient trop grande par rapport à l’évolution des gradient de vitesse. Dans les rares situations où ce ne c’est pas le cas, une seconde division sera effectuée dans l’autre direction. Ce sera notamment le cas lorsque le nuage est parfaitement circulaire. Il n’y a alors aucune direction privilégiée et seule une division en quatre particules *filles* permet d’obtenir un résultat pertinent.

En utilisant la relation de transport des moments d’un point à un autre (annexe C.2), les moments des particules *filles* peuvent être exprimés dans leurs repères

locaux respectifs, ce qui conduit au nouveau système suivant :

$$\begin{cases} M_{100}^{O_1} = M_{200}^{O_2} = \frac{M_{m00}^O}{2} \\ M_{1x^2}^{O_1} = \frac{M_{m_{x^2}}^O}{2} - \|\vec{OO_1}\|^2 \times \frac{M_{m00}^O}{2} \\ M_{2x^2}^{O_2} = \frac{M_{m_{x^2}}^O}{2} - \|\vec{OO_2}\|^2 \times \frac{M_{m00}^O}{2} \\ M_{1y^2}^{O_1} = \frac{M_{m_{y^2}}^O}{2} - \|\vec{OO_1}\|^2 \times \frac{M_{m00}^O}{2} \\ M_{2y^2}^{O_2} = \frac{M_{m_{y^2}}^O}{2} - \|\vec{OO_2}\|^2 \times \frac{M_{m00}^O}{2} \end{cases} \quad (4.21)$$

La résolution de ce système permet de déterminer les valeurs des demi grand axe et demi petit axe des particules elliptiques *filles* ainsi que leurs positions par rapport au centre de la particule *mère* :

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{M_{m00}^O{}^3}{M_{m_{y^2}}^O}} \\ b_1 = b_2 = \sqrt{\frac{4M_{m_{y^2}}^O}{M_{m00}^O}} \\ d_1 = d_2 = \sqrt{\left(\frac{M_{m_{x^2}}^O}{2} - M_{1x^2}^{O_1}\right) \frac{2}{M_{m00}^O}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \frac{a_m}{2} \\ b_1 = b_2 = b_m \\ d_1 = d_2 = \frac{\sqrt{3a_m^2}}{4} \end{cases} \quad (4.22)$$

Ce système permet de déterminer toutes les caractéristiques et les positions des particules *filles* de telle sorte que les moments de ces nouvelles particules transportées au niveau du centre de la particule *mère* soit égaux aux moments de la particule *mère* avant division. Un exemple du résultat de la division de deux particules, l'une initialement circulaire et l'autre initialement elliptique, est présenté en figure 4.12. L'application du théorème de transport (annexe C.2) permet de retrouver les moments de la particule *mère* à partir des moments des deux particules *filles*.

4.4.2 Critère de division

Une fois la méthode de division définie, il faut déterminer à quel moment une ellipse doit être divisée. Pour cela, un critère de division est introduit. Pour maximiser la pertinence de ce critère, celui-ci doit pouvoir comparer la taille de la particule numérique (qui peut elle-même être une particule fille résultant d'une division antérieure), à la vitesse de variation du gradient de vitesse, c'est-à-dire au laplacien de la vitesse qui contient les informations sur la courbure de l'écoulement. Il suffit donc d'imposer un seuil sur le produit de la taille de la particule avec la composante maximale du laplacien de la vitesse. Ce laplacien représentant le taux de variation du gradient, le produit de celui-ci avec le grand axe de la particule elliptique donne

la variation du gradient de vitesse entre ses deux extrémités. Il suffit donc d'imposer une valeur seuil à cette grandeur à partir de laquelle une particule doit être divisée. L'expression de ce critère, appelé ε , est donnée en équation 4.23.

$$\varepsilon \times a \times \|(\Delta \vec{u}_i)\| \leq 1 \quad (4.23)$$

Il représente la tolérance d'erreur sur la variation du gradient de vitesse à l'intérieur de la particule numérique considérée. Cependant, la détermination du laplacien de la vitesse se fait elle aussi au centre de la particule numérique. Comme pour le gradient, si la particule elliptique est trop étirée, il peut y avoir une différence notable entre la valeur du laplacien au centre de cette particule et sa valeur à l'extrémité de celle-ci. Un second critère sur la taille maximale de la particule elliptique est donc ajouté afin de résoudre ce problème. Pour que l'approximation soit raisonnable, il faut généralement que la taille de la particule ne dépasse pas $5\Delta x$ où Δx est la taille des mailles du champ de vitesse. C'est cette valeur qui est prise par la suite.

Afin de vérifier l'efficacité de la méthode de division, nous reprenons le cas de l'écoulement de Poiseuille dans lequel le nuage initialement circulaire est injecté au centre de l'écoulement, c'est-à-dire où le gradient de la vitesse est nul. Précédemment, aucune évolution des moments ne pouvait avoir lieu car toutes les composantes du gradient de vitesse sont nulles sur l'axe $y = 0$. Cette fois-ci, la division du nuage en particules numériques *filles* permet d'introduire une évolution des moments. La figure 4.13 présente ainsi la comparaison des moments calculés par la méthode particulière avec ceux calculés par la méthode des moments en permettant la division des particules numériques. Le critère de division a été fixé à $\varepsilon = 0,55$ de telle sorte que le résultat converge tout en gardant un nombre de particules *filles* minimum.

Dans ce cas, l'évolution des moments s'approche du résultat de référence mais ne permet pas de le reproduire fidèlement. Ceci est dû au caractère particulier de l'écoulement de Poiseuille, notamment sur l'axe $y = 0$. En effet, aucune évolution des moments ne peut avoir lieu tant que le nuage n'est pas divisé en au moins 2 particules *filles*, il faut donc découper le nuage dès la première itération. Or, dans ce cas, le nuage est circulaire tandis que la méthode de division est avant tout adaptée aux particules elliptiques. Si l'on reprend la figure 4.12 appliquée au cercle et que l'on effectue plusieurs divisions successives, les particules *filles* créées se répartissent naturellement selon un carré dont les moments égaux aux moments du cercle initial (figure 4.14). Cependant, si ces moments sont bien égaux à l'instant de la division, leur évolution future pourra être différente. C'est pourquoi, dans ce cas où l'état initial nécessite plusieurs divisions pour satisfaire le critère ε , il est préférable d'injecter un ensemble de particules *filles* respectant la distribution voulue qui pourront ensuite se diviser naturellement lors de leur évolution.

La méthode est maintenant appliquée au cas plus concret du jet pulsé défini précédemment (équation 4.12 et figure 4.6). Lors de ce test, un nuage de grains circulaire est injecté au point (0,36;0,07). Les coordonnées du point d'injection sont définies arbitrairement de telle sorte que la trajectoire du nuage traverse les

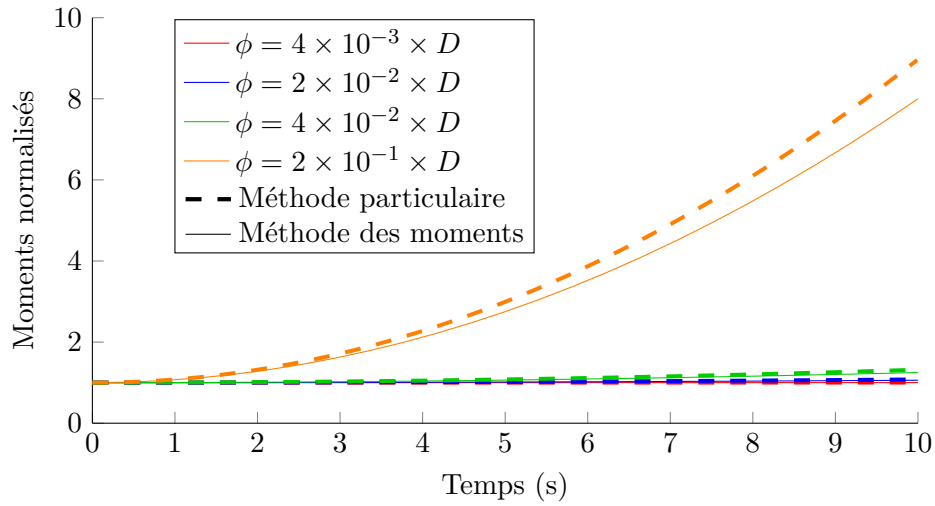


FIGURE 4.13 – Évolution du moment M_{x^2} normalisé par sa valeur initiale pour quatre nuages de tailles différentes injectés au centre d'un écoulement de Poiseuille, calculé à partir de la méthode particulaire (tiretés) et la méthode des moments en divisant les particules numériques avec $\varepsilon = 0,55$ (traits pleins).

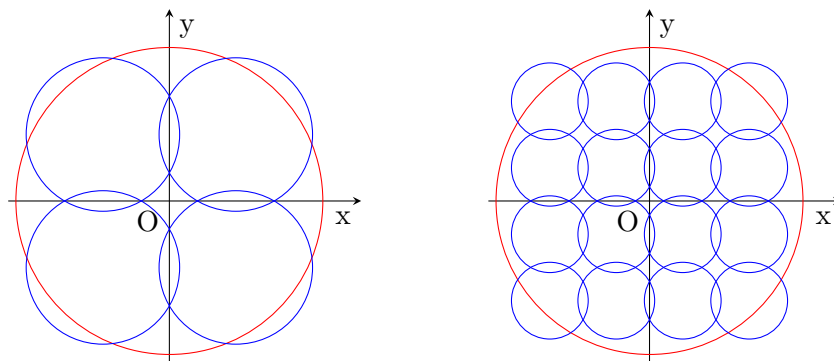


FIGURE 4.14 – Répartition des particules numériques après 2 divisions successives d'un cercle (à gauche) puis après 4 divisions (à droite). Les moments d'ordres globaux inférieurs ou égaux à 2 sont identiques à ceux du cercle initial (rouge).

zones nécessitant une division des particules numériques. Comme précédemment, la méthode des moments est comparée à la méthode particulière dans laquelle 1246 particules numériques indépendantes sont injectées et suivies.

La figure 4.15 présente l'évolution des différents moments du second ordre pour la méthode de référence, la méthode des moments sans division et la méthode des moments avec division des particules. Une nette amélioration apparaît lorsque la division est activée, notamment au niveau du dernier pic, à $t = 2,05$ s, c'est-à-dire lorsque le nuage de grains traverse la zone la plus courbée de l'écoulement. L'erreur relative maximale (à $t = 2,05$ s), en comparant à la méthode de référence, passe ainsi de 11,46 % à 1,62 % avec un critère $\varepsilon = 0,55$ entraînant la division du nuage initial en 14 particules *filles*. Les erreurs de norme L_2 sont respectivement : $4,75 \times 10^{-4}$, $6,48 \times 10^{-4}$ et $3,18 \times 10^{-4}$. Dans ce cas, le temps de calcul normalisé par rapport à la méthode particulière est alors de 0,091, soit une multiplication par un facteur 7,6 par rapport à la méthode sans division. Il faut noter qu'une partie importante du temps de calcul est dédiée au calcul des gradient et laplacien de vitesse. Or ceux-ci n'ont besoin d'être calculés qu'une seule fois pour l'ensemble des particules. Ainsi, le temps de calcul augmente lentement lorsque le nombre de particules augmente. Cette méthode permet ainsi d'obtenir un résultat précis à 1,62 % près pour un temps de calcul divisé par 11 par rapport à la méthode particulière, passant de 7 min 11 s à 39,2 s.

4.4.3 Fusion de particules

Suivant les zones de l'écoulement étudié, certaines peuvent être très perturbées et nécessitent donc des particules petites pour pouvoir s'adapter à ces perturbations, mais certaines peuvent au contraire être très calmes, ne nécessitant donc pas de petites particules pour représenter correctement l'évolution du nuage de grains. Si un nuage traverse une zone perturbée pour ensuite continuer dans une zone calme, il est naturel de chercher à reformer une particule *mère* à partir des particules *filles* afin de réduire le temps de calcul. Pour cela, connaissant les grands axes de toutes les particules *filles* ainsi que la laplacien de la vitesse, nous pouvons regrouper les particules *filles* de telle sorte que la somme de leurs grands axes respecte le critère de division défini en équation 4.23. Afin d'éviter qu'une particule ainsi formée ne se divise à nouveau immédiatement après, le critère de fusion est fixé à la moitié du critère de division. Une particule *mère* est ainsi créée à la place de ces particules *filles* dont le centre est placé au niveau du centre de masse des particules filles et les moments sont calculés par la somme des moments des particules *filles* transportés vers ce centre.

L'application de cette méthode de fusion au cas précédent permet de réduire le temps de calcul normalisé par rapport à la méthode particulière à 0,048 tout en obtenant la même précision. En effet, le nombre de particules *filles* augmente uniquement dans les zones qui le nécessitent, c'est-à-dire dans les intervalles $0,7 \leq t \leq 0,9$ s et $1,8 \leq t \leq 2,2$ s. Durant le reste de l'évolution, une seule particule

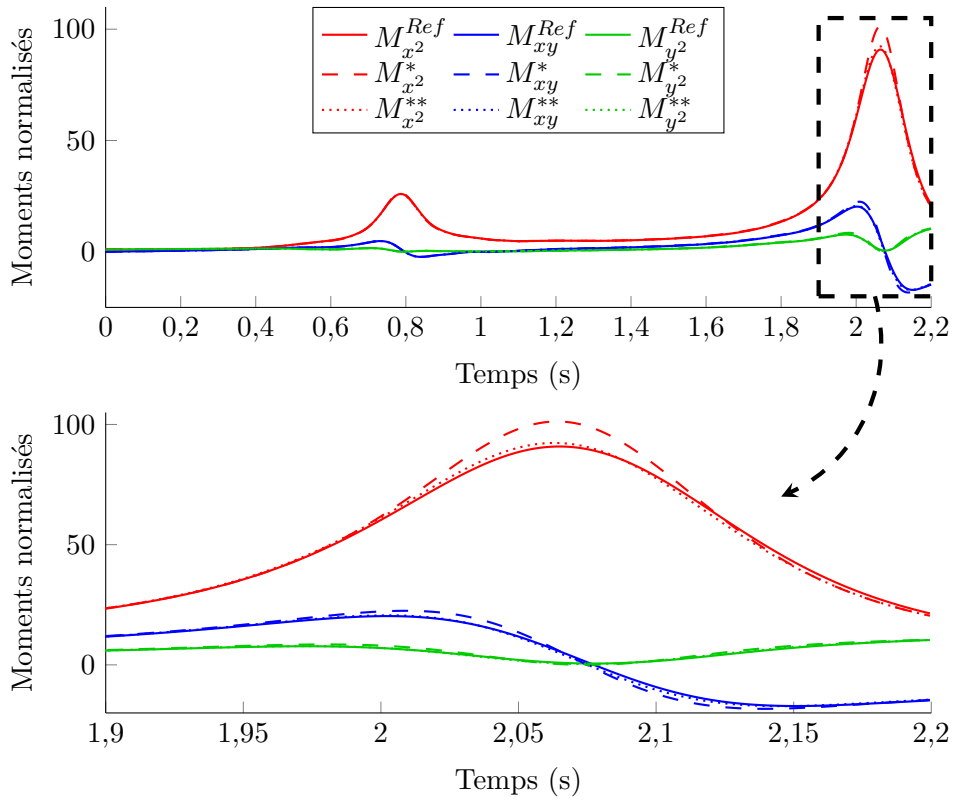


FIGURE 4.15 – Évolution des moments d'ordre 2 d'un nuage de grains dans un jet pulsé, calculés avec la méthode des moments avec (moments avec un exposant **) et sans division (moments avec un exposant *) avec la méthode particulaire (moments avec un exposant Ref).

Configuration et méthode utilisée	Ordre des moments calculés	Temps de calcul normalisé
Taylor au premier ordre	2	0,012
Taylor au second ordre	2	0,019
	4	0,022
	6	0,029
	8	0,041
Division des particules avec $\varepsilon = 0,55$, sans fusion	2	0,091
Division des particules avec $\varepsilon = 0,55$, avec fusion	2	0,048

TABLE 4.2 – Tableau regroupant les temps de calcul des différentes configurations de la méthode des moments dans l’écoulement issu du jet pulsé (4.6). Tous ces temps sont normalisés par le temps de calcul de la méthode particulaire comprenant 1246 particules pour représenter le nuage de grains.

numérique suffit à représenter le nuage de grains. Cette fois-ci, la méthode permet d’obtenir un résultat précis à 1,65 % près pour un temps de calcul divisé par 21 par rapport à la méthode particulaire, passant de 7 min11 s à 20,5 s.

La méthode de division des particules permet donc une nette amélioration des résultats tout en conservant un net avantage en terme de temps de calcul comparé à la méthode de référence. Cependant, cette méthode a de fortes limitations. Elle est en effet difficile à généraliser d’une part à une forme quelconque différente d’une ellipse et d’autre part à une distribution quelconque non uniforme au sein du nuage de grains. Cependant, la possibilité de raffiner le maillage en cours de calcul peut être très avantageuse et est moins sensible aux éventuelles imperfections de l’écoulement qui peut conduire à des perturbations importantes dans le cas de l’utilisation d’un développement de Taylor à l’ordre 2 de la vitesse. Un choix devra donc être fait en fonction de l’application visée pour préférer l’utilisation d’un développement de Taylor d’ordre supérieur ou bien de la division des particules numériques.

4.5 Prise en compte de la distribution interne du nuage de grains

Précédemment, seule une distribution uniforme de la concentration en grains au sein du nuage a été considérée. Cependant, les moments permettent théoriquement de représenter toute distribution arbitraire de concentration si des moments d’ordre suffisamment élevés sont utilisés. La méthode présentée précédemment n’ayant pas de limitation sur l’ordre des moments, elle peut théoriquement permettre de suivre l’évolution de n’importe quelle distribution au sein d’un nuage de grains de forme quelconque. Cependant, s’il est possible de suivre l’évolution des moments, il faut ensuite savoir interpréter ces moments. Nous avons vu en section 4.2 que l’interpré-

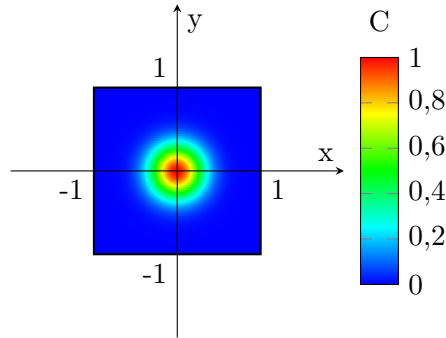


FIGURE 4.16 – Exemple de nuage de grains de support carré et de distribution gaussienne.

tation des moments d'ordre global faible est intuitive. En revanche, l'interprétation de moments d'ordres arbitrairement grand l'est beaucoup moins. Aussi, nous avons jusqu'ici négligé les effets diffusifs au sein du nuage de grains alors que cet effet peut être prépondérant dans certaines applications. Il semble donc nécessaire de définir une méthode permettant d'une part de faire le lien entre les moments d'une distribution de concentration et cette distribution et d'autre part de prendre en compte les effets de diffusion.

Uminsky *et al.* (2012) ont récemment proposé une méthode proche de la méthode des moments mais utilisant des polynômes de Hermite pour représenter la distribution interne de la particule numérique. La particularité de ces polynômes est qu'ils sont orthogonaux sur l'ensemble \mathbb{R} , ce qui permet de s'affranchir d'effets de bords indésirables. Ainsi, malgré la complexité supérieure des polynômes formant la base de Hermite et du produit scalaire associé ainsi que la difficulté à interpréter les moments de Hermite, cette méthode est adaptée au transport d'une concentration dans un écoulement. Cependant, les particules n'ayant pas de support compact, elle n'est pas adaptée à l'étude du cisaillement local que nous souhaitons étudier. Une méthode permettant à la fois de transporter une distribution arbitraire tout en conservant un aspect local doit donc être développée.

La mise en place d'une telle méthode est présentée dans cette section. Elle consiste à exprimer un champ scalaire, ici la concentration en grains, par des combinaisons linéaires de polynômes orthogonaux. Dans un premier temps, la méthode est développée pour un nuage de grains bidimensionnel, dont le support est un carré centré en $(0; 0)$ et dont la distribution interne est une gaussienne, tel que représenté sur le schéma 4.16. Cette stricte définition est nécessaire car la base de Legendre utilisée n'est orthogonale que dans l'intervalle $[-1; 1]^2$, ce qui est une condition nécessaire pour permettre la reconstruction de la concentration.

4.5.1 Transformation de la base canonique à la base de Legendre

Alors que la méthode des moments précédente utilise une projection de la concentration sur la base de canonique de l'espace vectoriel réel, la méthode de reconstruction de la distribution à partir des moments nécessite une projection sur une base orthogonale, ce qui n'est pas le cas de la base canonique. La première étape nécessaire est donc la transformation des moments calculés à partir de la base canonique en moments dits de Legendre qui proviennent de la projection sur la base éponyme de cet espace vectoriel. De nombreux choix de suites de polynômes orthogonaux pourraient convenir pour la reconstruction de la concentration. Cependant, notre choix s'est porté sur la base de Legendre car elle est composée de polynômes simples, que son produit scalaire associé est à poids constant de valeur 1 et qu'ils sont faciles à interpréter. Grâce à ces propriétés, le passage de la base canonique à la base de Legendre en sera facilité.

Les polynômes de Legendre formant la base orthogonale dite de Legendre peuvent être générés par récurrence en utilisant l'équation 4.24.

$$\begin{cases} P_{-1;n}(x,y) = 0 \\ P_{m;-1}(x,y) = 0 \\ P_{0;0}(x,y) = 1 \\ P_{m+1;n}(x,y) = \frac{2m+1}{m+1}xP_{m;n} - \frac{m}{m+1}P_{m-1,n} \\ P_{m;n+1}(x,y) = \frac{2n+1}{n+1}yP_{m;n} - \frac{n}{n+1}P_{m;n-1} \end{cases} \quad (4.24)$$

Ces polynômes sont tous orthogonaux deux à deux vis-à-vis du produit scalaire défini par l'équation 4.25 avec la fonction de poids $\omega(x,y) = 1$, c'est-à-dire qu'ils vérifient la condition d'orthogonalité 4.26 sur l'intervalle $\Omega = [-1; 1]^2$.

$$\langle P_{m;n}(x,y) | P_{o;p}(x,y) \rangle = \iint_{\Omega} P_{m;n}(x,y) P_{o;p}(x,y) \omega(x,y) dx dy \quad (4.25)$$

$$\langle P_{m;n}(x,y) | P_{o;p}(x,y) \rangle = \|P_{m;n}\|^2 \delta_{(m;n),(o;p)} = \begin{cases} \|P_{m;n}\|^2 & \text{si } (m;n) = (o;p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.26)$$

où $\|P_{m;n}\| = \sqrt{\langle P_{m;n}(x,y) | P_{m;n}(x,y) \rangle}$ est appelé *norme* du polynôme $P_{m;n}$. Comme pour la base canonique, l'ordre global d'un polynôme est défini comme $N = m + n$. Nous appellerons alors base d'ordre D la série de polynômes de Legendre d'ordres globaux $N \leq D$.

À partir de ces définitions, il apparaît que les polynômes de Legendre formant cette nouvelle base sont de la forme :

$$P_{m;n}(x,y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i b_j x^i y^j \quad (4.27)$$

tandis que la base canonique utilisée précédemment est de la forme :

$$Q_{m;n}(x,y) = x^m y^n \quad (4.28)$$

Autrement dit, il est très facile d'écrire les polynômes de Legendre en fonction des polynômes de la base canoniques :

$$P_{m;n}(x,y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i b_j Q_{i;j}(x,y) \quad (4.29)$$

où a_i et b_i sont des coefficients constants.

Aussi, il est possible de définir les moments de Legendre en projetant la concentration comme précédemment mais en se basant sur ce nouvel ensemble de polynômes :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{m;n} &= \langle C(x,y) | P_{m;n}(x,y) \rangle \\ &= \iint_{\Omega} C(x,y) P_{m;n}(x,y) dx dy \end{aligned} \quad (4.30)$$

En réutilisant le résultat 4.29, il est possible d'exprimer ces moments de Legendre en fonction des moments canoniques précédents :

$$\tilde{M}_{m;n} = \iint_{\Omega} C(x,y) \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i b_j x^i y^j dx dy \quad (4.31)$$

$$= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i b_j \iint_{\Omega} C(x,y) x^i y^j dx dy \quad (4.32)$$

$$= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i b_j M_{x^i y^j} \quad (4.33)$$

Grâce à cette dernière expression, il est maintenant possible de transformer un ensemble de moments calculés à partir de la projection de la concentration sur la base canonique en un ensemble de moments de Legendre. Par ailleurs, cette transformation ne pose pas de problème de fermeture puisque le calcul d'un moment de Legendre d'ordre global N ne nécessite pas la connaissance de moments d'ordre global supérieur à N .

4.5.2 Reconstruction de la concentration à partir des moments de Legendre

Grâce à la relation 4.33, nous avons maintenant accès à tous les moments de Legendre nécessaires à la reconstruction de la concentration au sein du support délimitant le nuage de grains. En effet, le théorème de **Weierstrass (1885)** affirme que si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle Ω et si $\psi \in \mathbb{R}^+$, alors il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \Omega, \quad |P_n(x) - f(x)| < \psi \quad (4.34)$$

Ce polynôme P_n est donc une approximation de la fonction $f(x)$ que nous appellerons $\tilde{f}(x)$ et qui sera de la forme :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x) \quad (4.35)$$

où a_i est un ensemble de coefficients et ϕ_i un ensemble de fonctions linéairement indépendantes.

L'approximation de la concentration consiste donc à minimiser la distance, au sens de la norme L_2 , entre $f(x)$ et $\tilde{f}(x)$. [Rice \(1969\)](#) montre que ce problème de minimisation est équivalent à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i \langle \phi_1(x) | \phi_j(x) \rangle = \langle f(x) | \phi_1(x) \rangle \\ \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_i \langle \phi_n(x) | \phi_j(x) \rangle = \langle f(x) | \phi_n(x) \rangle \end{cases} \quad (4.36)$$

Or, la base utilisée étant orthonormée, la condition 4.26 rend nul de nombreux termes et les coefficients a_i s'expriment finalement de la manière suivante :

$$a_i = \frac{\langle f(x) | \phi_i(x) \rangle}{\langle \phi_i(x) | \phi_i(x) \rangle} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.37)$$

Ainsi, l'approximation de la concentration grâce aux moments s'écrit :

$$\tilde{c}(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \tilde{M}_{i,j} \frac{P_{i,j}(x, y)}{\langle P_{i,j} | P_{i,j} \rangle} \quad (4.38)$$

où N est l'ordre maximum des moments représentés, ou *ordre de coupure*. Ce maximum ne veut pas nécessairement dire que tous les $\tilde{M}_{i,j}$ tels que $i + j > N$ sont nuls. Un ordre maximum est fixé arbitrairement car la plupart des fonctions rencontrées nécessitent un ordre infini pour obtenir la valeur exacte de la solution en tout point, ce qui n'est pas réalisable. Cependant, une approximation satisfaisante peut souvent être obtenue pour des ordres inférieurs à 20. Enfin, cette approximation est une fonction continue et peut donc être projetée sur un maillage arbitraire. Pour les représentations, un maillage de 100×100 pixels est choisi.

Cette méthode de reconstruction est appliquée au cas d'étude précédent représenté en figure 4.16 pour différents ordres de coupure allant de $N = 2$ à 20. La distribution étant gaussienne, c'est un cas particulièrement difficile à représenter par une approximation polynomiale et constitue donc un test intéressant. Les moments utilisés pour la reconstruction de la distribution sont calculés analytiquement. Les différents résultats sont rassemblés sur la figure 4.17. Afin de quantifier la qualité de reconstruction, l'erreur relative globale de norme L_2 est calculée :

$$Er_2 = \sqrt{\frac{\iint_{-1}^1 (\tilde{c}(x, y) - c(x, y))^2 dx dy}{\iint_{-1}^1 c(x, y)^2 dx dy}} \quad (4.39)$$

où $\tilde{c}(x,y)$ est le polynôme approximant de la concentration et $c(x,y)$ la solution analytique de la concentration. La figure 4.18 présente l'évolution de cette erreur relative globale, calculée sur l'ensemble du domaine, en fonction de l'ordre de coupure. Pour un ordre de coupure de $N = 20$, l'erreur relative globale de norme L_2 du polynôme approximant par rapport à la solution analytique est égale à $1,72 \times 10^{-3}$, ce qui atteste d'une bonne précision de la reconstruction.

La technique présentée permet donc de faire le lien entre la méthode de moments et la représentation de la concentration au sein du nuage. Elle est cependant limitée par l'ordre des moments calculés et plus la distribution est complexe, plus l'ordre de coupure doit être élevé.

4.5.3 Sensibilité de la reconstruction

L'étape de reconstruction permet d'obtenir une image fidèle de la concentration à partir des moments de sa distribution. Cependant, la tolérance aux erreurs doit être vérifiée. Pour cela, un bruit aléatoire est appliqué aux moments, c'est-à-dire que chaque moment est multiplié par un coefficient η dont l'expression est donnée en 4.40.

$$\eta = 1 + \gamma(1 - 2\zeta) \quad (4.40)$$

où γ est un paramètre contrôlant l'amplitude du bruit et ζ un nombre aléatoire tiré entre 0 et 1. Chaque moment bruité vaut donc :

$$M_{x^m y^n}^\eta = \eta M_{x^m y^n} \quad (4.41)$$

Une fois ces moments obtenus, le polynôme approximant est déterminé à partir de ceux-ci et l'erreur de norme L_2 est calculée selon l'équation :

$$Er_2 = \sqrt{\frac{\iint_{-1}^1 (\tilde{c}^\eta(x,y) - \tilde{c}(x,y))^2 dx dy}{\iint_{-1}^1 \tilde{c}(x,y)^2 dx dy}} \quad (4.42)$$

ou $\tilde{c}(x,y)$ est le polynôme approximant de la concentration et $\tilde{c}^\eta(x,y)$ le polynôme bruité approximant la concentration.

Le test est effectué pour un ordre de coupure $N = 20$ avec des valeurs de γ allant de 10^{-7} à 10. L'évolution de l'erreur du polynôme approximant bruité par rapport à celui non bruité est donnée en figure 4.19 et des exemples de résultats de concentration reconstruite en appliquant différents bruits sont présentés en figure 4.20. L'évolution de cette erreur en fonction du bruit est parfaitement linéaire et augmente rapidement selon l'équation $Er_2 = 602 \times \gamma$. Cette méthode est donc particulièrement sensible aux erreurs et une attention particulière devra être portée sur le contrôle de celles-ci. Par ailleurs, cette sensibilité est d'autant plus grande que l'ordre de coupure est élevé.

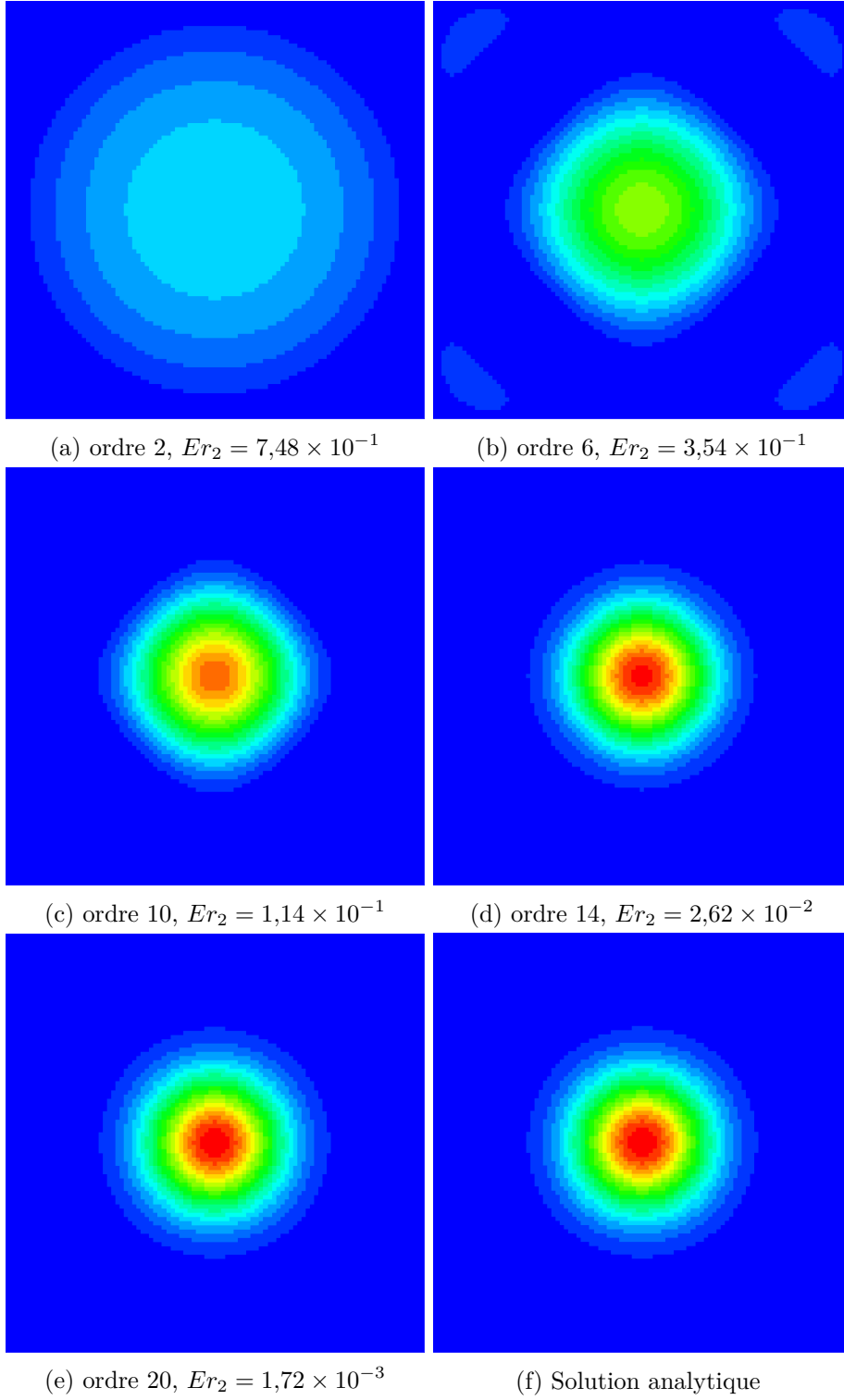


FIGURE 4.17 – Reconstruction d’une distribution gaussienne à partir de ses moments pour différents ordres de coupure (a à e), comparés à la solution analytique (f).

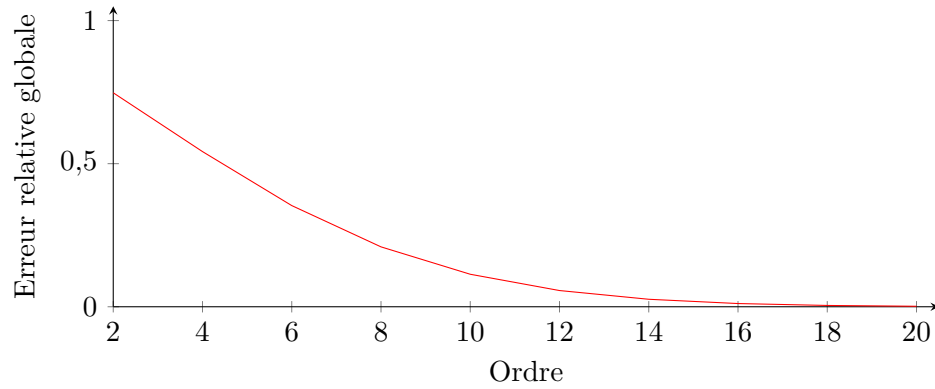


FIGURE 4.18 – Évolution de l'erreur relative globale en fonction de l'ordre de coupure.

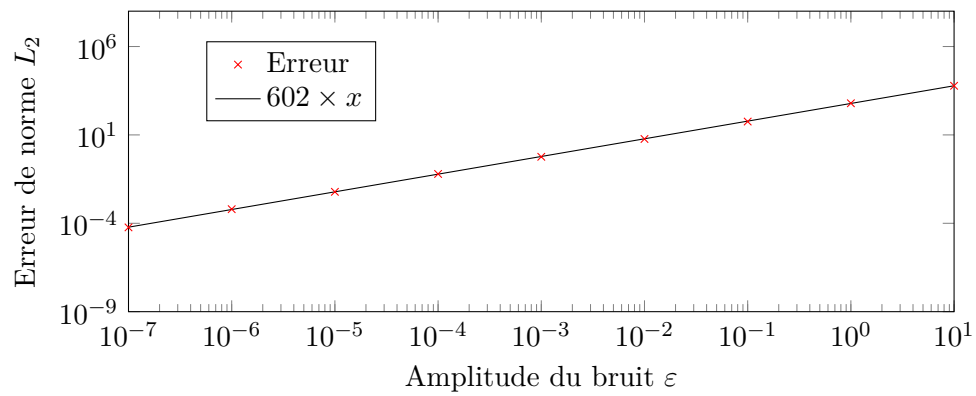


FIGURE 4.19 – Évolution de l'erreur de norme L_2 en fonction du paramètre γ contrôlant l'amplitude du bruit appliqué aux moments.

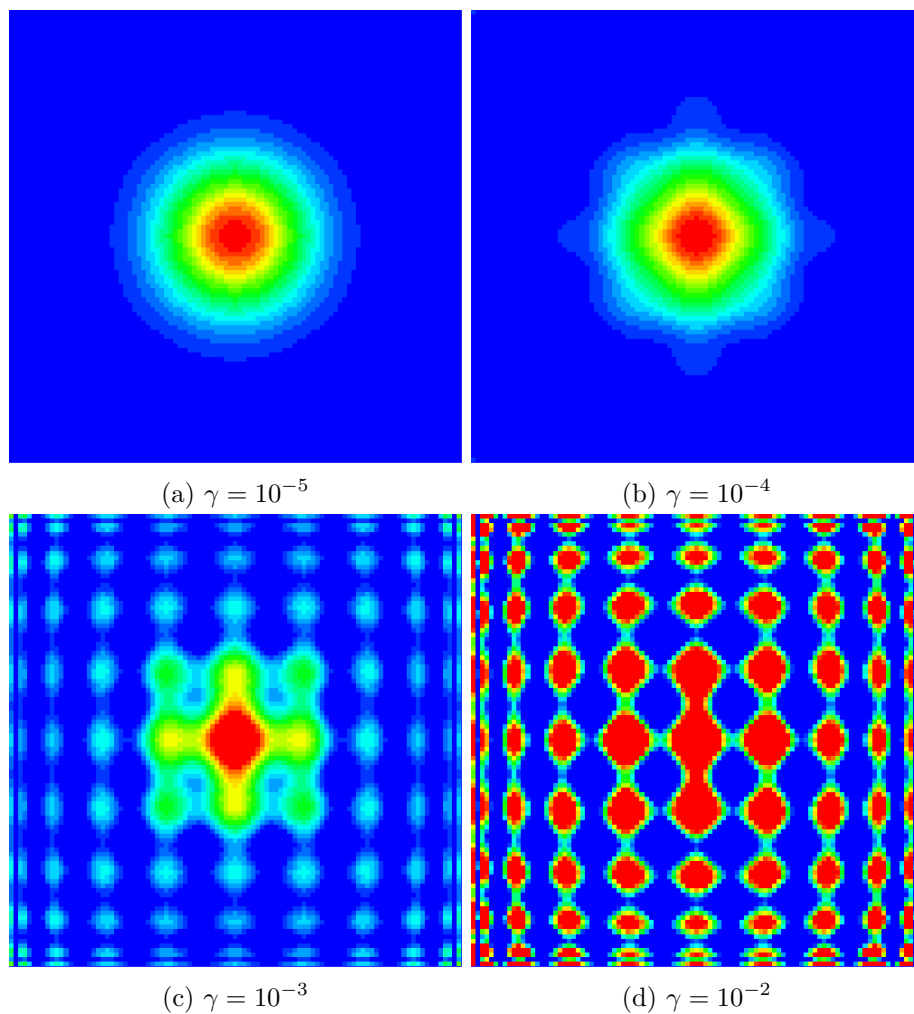


FIGURE 4.20 – Reconstruction d’une distribution gaussienne à partir de ses moments en leur appliquant des bruits aléatoires d’amplitudes différentes.

4.5.4 Diffusion

Une fois qu'il est possible de déterminer la valeur de la concentration en tout point du nuage de grains, il est aussi possible de calculer les effets diffusifs et dispersifs au sein du nuage. En effet, les développements précédents ont négligé le terme diffusif des équations d'évolution temporelle car ils se focalisaient sur une distribution uniforme dans laquelle toute diffusion est impossible. Or, la distribution désormais considérée étant quelconque, les effets diffusif et dispersif ne sont a priori pas nuls et doivent être considérés. Pour cela, nous repartons de l'équation 4.4 et injectons l'équation d'advection-diffusion dans celle-ci, en considérant un développement de Taylor de la vitesse à l'ordre 1, ce qui fait apparaître un terme en ΔC :

$$\begin{aligned}
\frac{dM_{x^m y^n}^i}{dt} &= \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^m (y' - y_i)^n \left(\frac{\partial C(\vec{r}')}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}(\vec{r}') C(\vec{r}')) \right) dx' dy' \\
&+ m \int_{\sigma_i} \left(u(\vec{r}') - u(\vec{r}_i) \right) \left((x' - x_i)^{m-1} (y' - y_i)^n C(\vec{r}') \right) dx' dy' \\
&+ n \int_{\sigma_i} \left(v(\vec{r}') - v(\vec{r}_i) \right) \left((x' - x_i)^m (y' - y_i)^{n-1} C(\vec{r}') \right) dx' dy' \\
&= \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^m (y' - y_i)^n \left(D \Delta C(\vec{r}') \right) dx' dy' \\
&+ m \int_{\sigma_i} \left(u(\vec{r}') - u(\vec{r}_i) \right) \left((x' - x_i)^{m-1} (y' - y_i)^n C(\vec{r}') \right) dx' dy' \quad (4.43) \\
&+ n \int_{\sigma_i} \left(v(\vec{r}') - v(\vec{r}_i) \right) \left((x' - x_i)^m (y' - y_i)^{n-1} C(\vec{r}') \right) dx' dy' \\
&= \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^m (y' - y_i)^n \left(D \Delta C(\vec{r}') \right) dx' dy' \\
&+ m \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial x} M_{x^m y^n}^i + m \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial y} M_{x^{m-1} y^{n+1}}^i \\
&+ n \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial x} M_{x^{m+1} y^{n-1}}^i + n \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial y} M_{x^m y^n}^i
\end{aligned}$$

Or, la méthode de reconstruction permet d'obtenir une expression analytique de la fonction polynomiale approchant au mieux, au sens de la norme L_2 , la concentration $C(\vec{r})$. Cette expression est donnée par l'équation 4.38 et peut être utilisée dans l'équation d'advection-diffusion de telle sorte que le terme ΔC devienne :

$$\Delta C(x, y) = \Delta \left[\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \tilde{M}_{i,j} \frac{P_{i,j}(x, y)}{\langle P_{i,j} | P_{i,j} \rangle} \right] \quad (4.44)$$

où $P_{i,j}(x, y)$ est le seul terme dépendant de x et y . L'opérateur laplacien ne s'applique donc qu'à ce polynôme $P_{i,j}(x, y)$ et l'équation précédente devient :

$$\Delta C(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \tilde{M}_{i,j} \frac{\Delta P_{i,j}(x, y)}{\langle P_{i,j} | P_{i,j} \rangle} \quad (4.45)$$

Le calcul du laplacien de C ne nécessite donc finalement que la connaissance des moments $\tilde{M}_{i,j}$ et le calcul du laplacien des polynômes de Legendre, ce qui peut être fait analytiquement. L'équation d'évolution devient ainsi :

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_{x^m y^n}^i}{dt} &= \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^m (y' - y_i)^n D \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \tilde{M}_{i,j} \frac{\Delta P_{i,j}(x,y)}{\langle P_{i,j} | P_{i,j} \rangle} dx' dy' \\
 &\quad + m \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial x} M_{x^m y^n}^i + m \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial y} M_{x^{m-1} y^{n+1}}^i \\
 &\quad + n \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial x} M_{x^{m+1} y^{n-1}}^i + n \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial y} M_{x^m y^n}^i \\
 &= D \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \frac{\tilde{M}_{i,j}}{\langle P_{i,j} | P_{i,j} \rangle} \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^m (y' - y_i)^n \Delta P_{i,j}(x,y) dx' dy' \\
 &\quad + m \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial x} M_{x^m y^n}^i + m \frac{\partial u(\vec{r}_i)}{\partial y} M_{x^{m-1} y^{n+1}}^i \\
 &\quad + n \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial x} M_{x^{m+1} y^{n-1}}^i + n \frac{\partial v(\vec{r}_i)}{\partial y} M_{x^m y^n}^i
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

où le terme intégral se résume à l'intégration d'un polynôme sur l'intervalle $[-1; 1]^2$ et peut donc être calculé analytiquement.

Cette étape de diffusion est testée sur le cas précédent pour une diffusion durant 50 s avec un coefficient de diffusion $D = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Le résultat est visible en figure 4.21. Le centre du nuage est alors très proche du résultat analytique et confirme ainsi les possibilités de la méthode. Cependant, de fortes erreurs apparaissent dans les coins du domaine et se propagent petit à petit vers le centre, même lorsque le pas de temps utilisé est petit. Si l'on calcule l'erreur de norme L_2 dans disques centrés sur le centre de la gaussienne, pour différents rayons, on observe un très bonne adéquation de la solution pour toute la zone centrale du nuage (figure 4.22). Les erreurs se situant principalement à une distance supérieure à 80% à partir de laquelle on observe une croissance très rapide de l'erreur.

Cette erreur est en fait contenue dans l'état initial, lorsque les moments sont calculés jusqu'à l'ordre de coupure. Il est possible de l'observer sur la figure 4.23 sur laquelle est représentée l'erreur relative en fonction de la distance par rapport au centre de la distribution après diffusion, sur la ligne d'équation $y = x$. On observe que l'erreur augmente nettement pour les points les plus éloignés du centre, c'est-à-dire les coins. L'information manquante introduit une erreur qui est très fortement amplifiée par le calcul du laplacien nécessaire au processus de diffusion. Or, la section 4.5.3 a montré la forte sensibilité de la méthode. Il semble actuellement difficile de résoudre un tel problème, à moins de trouver un mécanisme de correction ou bien d'utiliser une autre base de polynômes qui serait moins sensible aux effets de bords. Par exemple, utiliser la méthode proposée par [Uminsky et al. \(2012\)](#) permettrait de calculer les effets de la diffusion. Cependant, elle ne permettrait pas de garder l'aspect local de la méthode des moments qui est particulièrement adaptée à l'étude

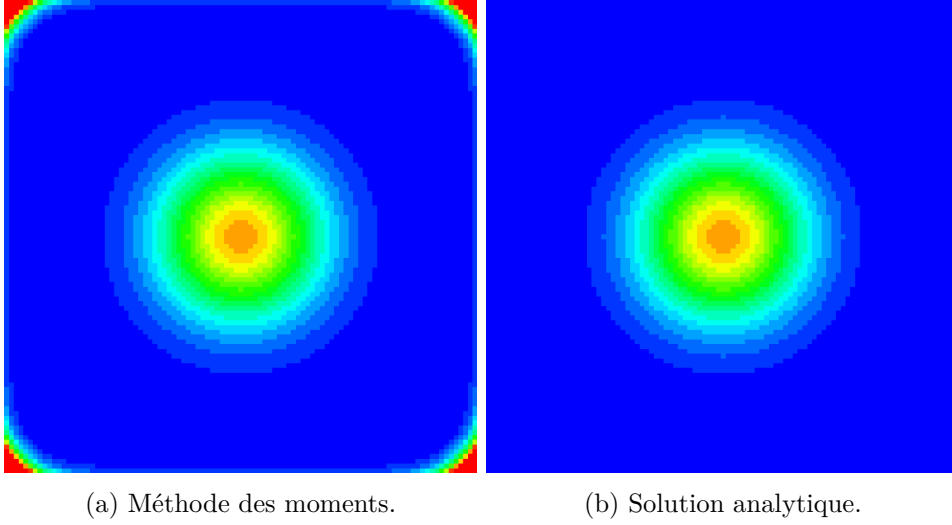


FIGURE 4.21 – Exemple de nuage de grains de support carré et de distribution gaussienne dont l'évolution par diffusion a été calculée par la méthode des moments (a) et comparée à la solution analytique (b) pour un ordre de coupure $N = 20$.

des déformations locales. L'idéal serait donc de pouvoir combiner à l'avenir les avantages des deux méthodes.

4.5.5 Advection du nuage de grains

Précédemment, la méthode n'a été appliquée qu'à un cas idéal où le support du nuage est restreint à l'intervalle $[-1; 1]^2$. Dans la pratique, ce ne sera que rarement le cas, surtout lorsque le nuage est advecté par un écoulement. Cependant, les polynômes de Legendre ne sont orthogonaux que sur cet intervalle ce qui implique que la reconstruction de la concentration ainsi que sa diffusion ne peuvent être calculées qu'à l'intérieur de cet intervalle. Une transformation géométrique doit donc être appliquée aux moments (annexe C.1). Le calcul de cette transformation se fait de la même manière qu'en section 4.3, même pour le cas où le développement de Taylor ne se fait qu'à l'ordre 1. De cette manière, la déformation du support par rapport à l'état initial est connue à chaque instant. La transformation permettant de passer de l'état initial à l'intervalle $[-1; 1]^2$ étant elle aussi connue, la détermination de la transformation totale est immédiate. Si la diffusion est calculée, la transformation doit aussi être appliquée à l'opérateur laplacien.

Un exemple de nuage à distribution gaussienne advecté dans un écoulement pendant 50 s est présenté sans diffusion (figure 4.24a) puis avec diffusion (figure 4.24b) avec un coefficient de diffusion $D = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Contrairement à l'étape de diffusion, celle-ci n'introduit qu'une faible erreur et ne fait pas diverger le calcul.

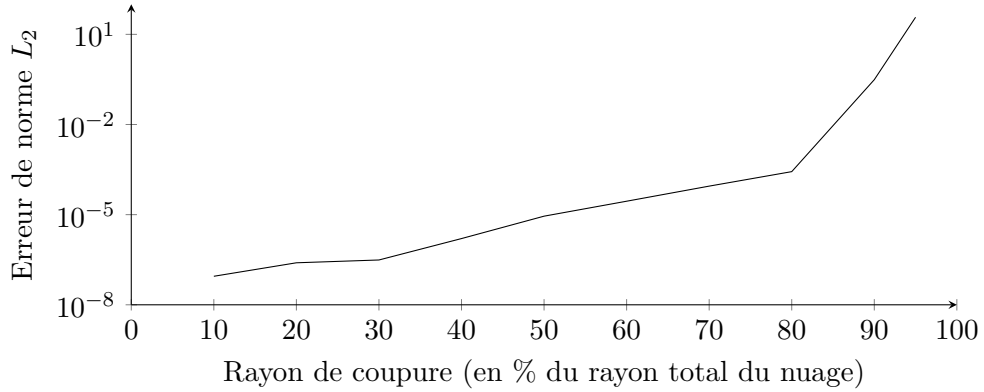


FIGURE 4.22 – Évolution de l'erreur de norme L_2 en fonction de la distance au centre de la distribution gaussienne jusqu'à laquelle l'erreur est calculée.

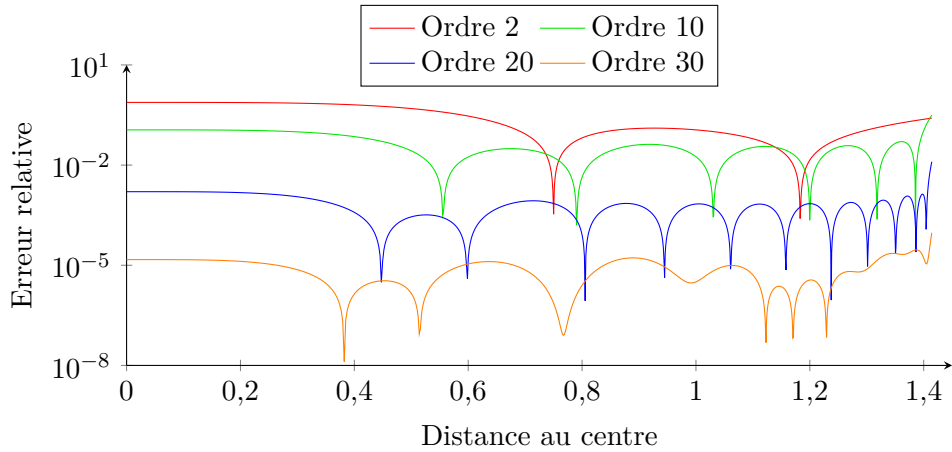


FIGURE 4.23 – Évolution de l'erreur relative en fonction de la distance au centre de la distribution gaussienne pour différents ordres de coupure.

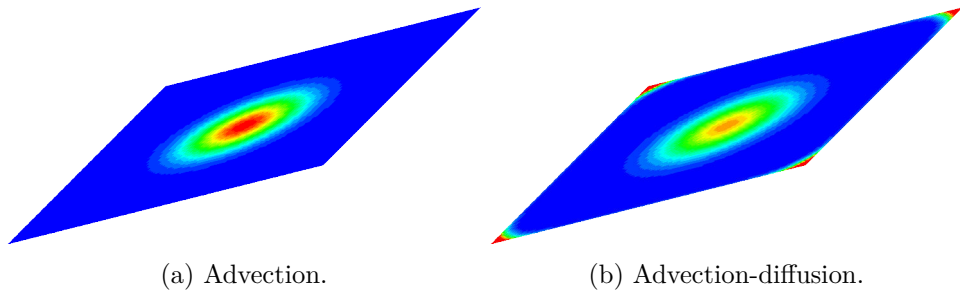


FIGURE 4.24 – Exemple de nuage de grains de support carré et de distribution gaussienne dont les évolutions par convection (a) et par advection-diffusion (b) ont été calculées par la méthode des moments. L'advection n'introduit que peu d'erreur, même lorsque la diffusion est prise en compte.

4.6 Conclusion

La méthode des moments qui a été présentée est un nouvel outil permettant d'obtenir des résultats dont la précision peut s'approcher, voir égaler si la situation est favorable, celle des méthodes particulières pour un coût CPU largement inférieur. Certaines restrictions sur l'application de la méthode doivent bien sûr être considérées, notamment la taille du nuage à représenter par rapport aux échelles caractéristiques de l'écoulement du fait de l'utilisation d'un développement de Taylor. Par ailleurs, la diffusion au sein du nuage n'est actuellement pas utilisable du fait d'effets de bords indésirables qui n'ont pu être résolus. Malgré tout, cette méthode sera appliquée à deux systèmes différents dans le chapitre 6 : un écoulement en milieu poreux et un écoulement de type mascaret qui sont tous les deux hétérogènes bien que le premier soit stationnaire et le second instationnaire. Enfin, cette méthode permet d'étudier précisément les effets très localisés du cisaillement de l'écoulement sur le transport sédimentaire car elle peut contenir une large part de la dynamique de l'écoulement grâce au développement de Taylor de la vitesse.

Correction de la divergence : application aux champs expérimentaux

Sommaire

5.1	Introduction	117
5.2	Méthode particulière	119
5.2.1	Dispositif expérimental	119
5.2.2	Corrélation entre la concentration estimée et la divergence de l'écoulement	121
5.2.3	Méthodes de correction	124
5.3	Méthode des moments	128
5.3.1	Évolution de la surface d'un nuage elliptique en présence de divergence	128
5.3.2	Méthode de correction	131
5.4	Conclusion	133

5.1 Introduction

La simulation numérique des phénomènes de transport de grains ou de concentration s'appuie généralement sur des écoulements issus de calculs numériques. La plupart du temps, la phase fluide et le phénomène de transport sont calculés en même temps par différents modules regroupés au sein d'un même code numérique. Ainsi, le module gérant la phase fluide s'assure de la consistance du champ de vitesse, particulièrement au niveau de la divergence de ce champ, et le module de transport n'a donc aucune difficulté puisque les données qu'il reçoit en entrée sont consistantes. Cependant, il peut être intéressant de modéliser le phénomène de transport en s'appuyant sur des données expérimentales plutôt que numériques. Cette méthode apporte de nouvelles difficultés puisque, cette fois-ci, les données reçues par le module de transport peuvent présenter des irrégularités qui induisent des valeurs de divergence du champ de vitesse non négligeables.

Le développement des méthode de *Particle Image Velocimetry* (PIV) durant les dernières décennies a été la source de nombreux champs de vitesse, bidimen-

sionnels dans un premier temps et maintenant tridimensionnels. Un des problèmes rencontrés lorsque que l'on considère une mesure bidimensionnelle d'écoulements qui sont en fait tridimensionnels est la présence de divergence due aux mouvements du fluide perpendiculaires au plan de mesure, même lorsque l'on tente de se placer dans un plan de symétrie de l'écoulement. Aussi, même lorsque la mesure est effectuée de manière tridimensionnelle, la divergence est réduite au niveau des erreurs expérimentales mais n'est toujours pas nulle.

Ce problème est par exemple bien connu dans le cas de l'utilisation de la méthode des lignes de courant. Lorsque la condition de divergence nulle n'est pas respectée, les trajectoires et lignes de courant étant très sensibles à la présence de divergence au sein de l'écoulement, des trajectoires non physiques apparaissent. Les derniers développements concernant la méthode SPH induisent des problèmes similaires. Cette méthode est souvent utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles dans des situations complexes mettant en jeu des surfaces libres et des frontières mobiles. Cependant, cette méthode est basée sur une compressibilité artificielle dont la conséquence est une approximation assez grossière de la condition de divergence nulle qui est ensuite corrigée pour s'approcher autant que possible d'une valeur nulle de cette divergence. Malgré tout, la divergence du champ qui en résulte est souvent non-nulle, ce qui a de fortes conséquences sur le calcul des trajectoires si celles-ci doivent être calculées. Ce problème est d'autant plus important dans le cadre de la magnétohydrodynamique où la présence de divergence peut faire apparaître une force magnétique non physique (Tricco et Price, 2012). Cette question est donc primordiale lorsque des sédiments doivent être transportés à partir de ces champs de vitesse.

Dans les méthodes utilisées ici, des traceurs lagrangiens dont les trajectoires sont calculées à partir des champs de vitesse sont utilisés pour estimer l'évolution de la concentration (chapitre 3) ou bien la déformation d'un nuage de grains (chapitre 4). La présence de divergence au sein des champs de vitesse est donc problématique. C'est pourquoi des méthodes de correction sont proposées.

Dans un premier temps, nous nous focaliserons sur la méthode particulière classique qui sera appliquée à un jet en écoulement transverse dont les champs de vitesse et de concentration ont été mesurés expérimentalement. Ces mesures permettront de comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux en ce qui concerne le transport de la concentration. La corrélation entre la présence de divergence et les erreurs d'estimation de la concentration sera présentée ainsi que deux méthodes de correction. Dans un second temps, l'impact de la présence de divergence sur la méthode des moments sera étudié à partir d'un champ de vitesse analytique et une méthode de correction sera proposée.

5.2 Méthode particulaire

5.2.1 Dispositif expérimental

Afin de caractériser pleinement l'écoulement considéré, ici un jet en écoulement transverse, des mesures tridimensionnelles couplées de vitesse et de concentration ont été effectuées. Les champs de vitesse ont été obtenus par une technique de PIV 3D à balayage et les champs de concentration l'ont été par *Laser Induced Fluorescence* (LIF) 3D à balayage. Le dispositif expérimental est schématisé en figure 5.1. Celui-ci comporte deux cuves indépendantes : la grande cuve contient l'eau formant l'écoulement transverse qui estensemencée à la fois en particules utilisées pour la PIV et en colorant utilisé pour la LIF, et la petite cuve contient l'eau formant le jet qui est uniquementensemencée en particule PIV. Deux pompes sont connectées à ces cuves pour acheminer leurs fluides respectifs jusqu'à la veine d'essai de telle sorte que ceux-ci aient la même vitesse lors de leur entrée dans la veine. Cette vitesse est ajustée afin d'obtenir un nombre de Reynolds basé sur la taille de l'orifice du jet égal à 500. Cet orifice est un carré de 30 mm de côté et la vitesse des deux écoulements est donc égale à 16 mm/s à température ambiante. Enfin, un laser permet d'éclairer une fine nappe qu'un miroir oscillant est chargé de déplacer afin de scanner l'ensemble du volume de mesure et deux caméras sont chargées de l'enregistrement des données, l'une mesurant uniquement le signal issu du colorant et l'autre uniquement le signal issu des particules de PIV (figure 5.2). Une description détaillée du protocole expérimental est donnée dans l'article *Instantaneous volumic concentration and velocity measurements of a jet in crossflow for the evaluation of the entrainment* (Berchet *et al.*, 2013). Ce système permet de capturer un volume de $120 \times 150 \times 50$ mm toutes les 60 ms pendant 7,5 s. Les particules utilisées pour la PIV sont des billes de verre argentées de 10 μ m de diamètre et le colorant utilisé pour la LIF est de la *Rhodamine-6G* diluée à 10^{-7} mol/l. Les propriétés de ce colorant permettent de différencier le signal provenant de celui-ci du signal provenant des particules de PIV grâce à des filtres passe-haut et passe-bande. Chaque champ tridimensionnel de concentration ou de vitesse est reconstruit à partir de 100 images de 768×656 pixels. La mémoire des caméras utilisées ne permet la capture que de 12500 images à cette résolution, ce qui limite la durée d'enregistrement à 7,5 s. Dans ces conditions, la vitesse de balayage (300 mm/s) est très supérieure aux vitesses mises en jeu dans l'écoulement et l'on peut considérer que l'écoulement reste figé durant le temps de mesure d'un champ tridimensionnel et qu'il n'y a donc pas de déformation induite par le système de mesure. Enfin, aucun post-traitement n'est appliqué aux champs de vitesse ce qui permet de se placer dans un cas très défavorable où les valeurs de la divergence sont élevées.

Dans la suite, le fluide sans colorant, c'est-à-dire le fluide provenant du jet, sera le fluide dont la concentration est fixée à 1 tandis que le fluide de l'écoulement transverse avec colorant aura une concentration nulle.

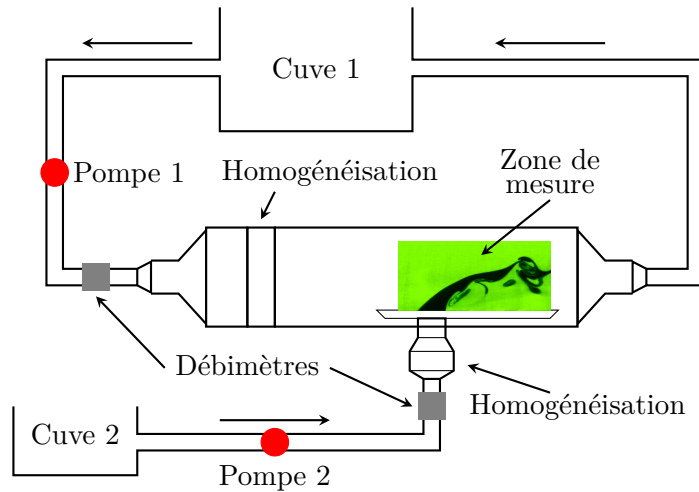


FIGURE 5.1 – Schéma du dispositif expérimental.

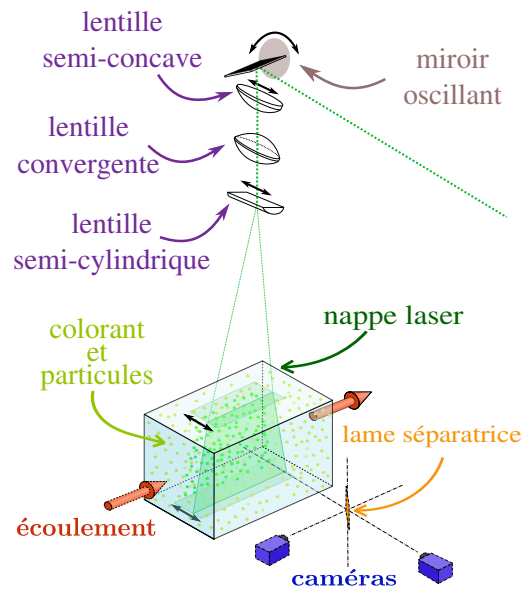


FIGURE 5.2 – Schéma du dispositif de mesure (Berchet *et al.*, 2013).

5.2.2 Corrélation entre la concentration estimée et la divergence de l'écoulement

À partir des champs de vitesse déterminés expérimentalement, l'évolution de la concentration est calculée numériquement en appliquant la méthode particulaire du chapitre 3. La concentration relative dans une zone d'injection située au-dessus de l'orifice du jet est imposée à 1, c'est-à-dire que l'on considère qu'aucun mélange n'a lieu dans cette zone et que colorant est advecté à partir de là. Par ailleurs, la diffusion est négligée dans un premier temps car le coefficient de diffusion de la rhodamine-6G est faible vis-à-vis du temps simulé (environ $4,4 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$).

L'application directe de la méthode particulaire conduit à un très mauvais résultat, comme on peut le voir sur la figure 5.4a. Pour observer plus en détail l'évolution de la concentration, notamment entre les premier et second champs de vitesse, on injecte numériquement la concentration mesurée expérimentalement à $t = 0 \text{ s}$ et on l'advecte uniquement à partir du premier champ de vitesse durant 60 ms, c'est-à-dire durant le temps séparant deux champs de vitesse expérimentaux. Durant cette période, la même zone d'injection que décrite précédemment est imposée afin de continuer à alimenter l'écoulement en traceurs. La figure 5.5 représente la corrélation entre les îlots de variation anormale de la concentration et la divergence. L'échelle de couleur représente la divergence du premier champ de vitesse et les lignes sont des niveaux de concentration dont l'évolution a été calculée numériquement à partir de la concentration expérimentale initiale et durant 60 ms. On observe alors des îlots où la concentration diminue anormalement et d'autres où elle augmente tout aussi anormalement. Si l'on superpose ce champ de concentration avec la divergence du premier champ de vitesse, on observe une très forte corrélation entre les positions de ces îlots et les zones de divergence non-nulle, ce qui tant à prouver l'effet important de la divergence sur l'estimation de la concentration.

Pour comprendre cet effet, il faut revenir aux fondements des méthodes lagrangiennes que nous utilisons. Nous avons défini plusieurs conditions dans le chapitre 3 qui doivent être respectées afin d'assurer la convergence de la méthode vers la solution recherchée. Parmi celles-ci, la condition 3.10 stipule que les particules numériques doivent être réparties d'une certaine manière au sein du noyau de régularisation. Le schéma 5.6 montre l'effet de la divergence non nulle sur leur répartition. Les particules initialement correctement réparties (particules rouges) se rapprochent les unes des autres pour finir en une distribution très serrée (particules bleues). Ceci induit une augmentation de la valeur de leur projection sur le noyau de régularisation (ici $M4'$). Le résultat sera donc une estimation anormalement élevée de la concentration. Les méthodes de correction devront donc soit corriger la répartition des particules numériques, soit corriger leurs poids de telle sorte qu'ils compensent l'effet dû à cette mauvaise répartition.

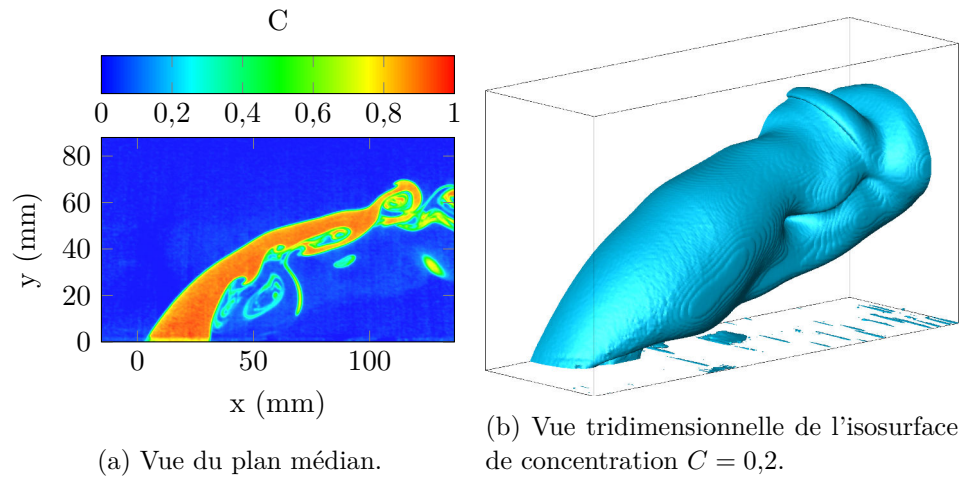


FIGURE 5.3 – Résultat expérimental final.

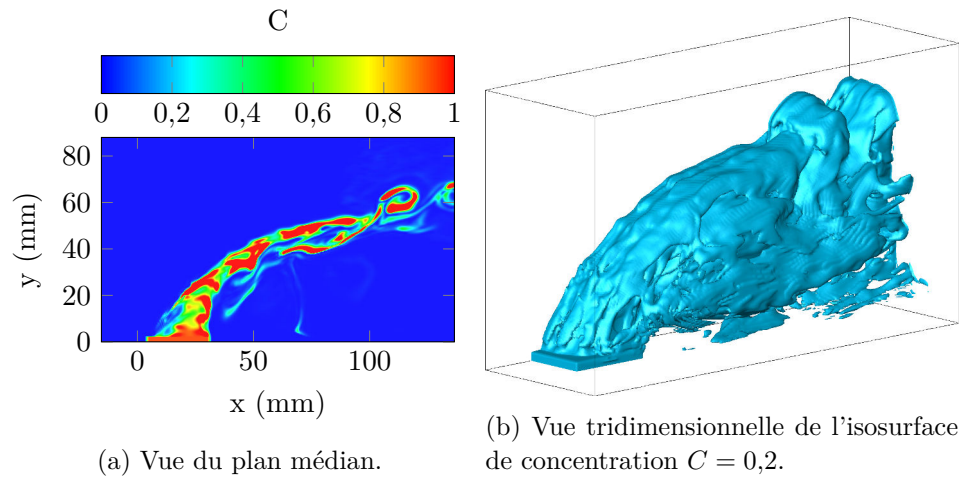


FIGURE 5.4 – Résultat numérique final sans aucune correction.

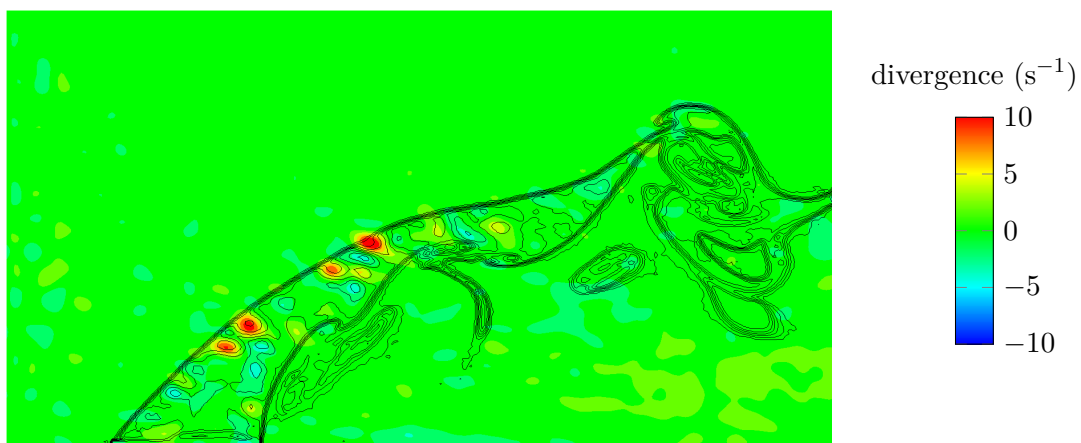


FIGURE 5.5 – Mise en évidence de la corrélation entre les îlots de variation anormale de la concentration et la divergence.

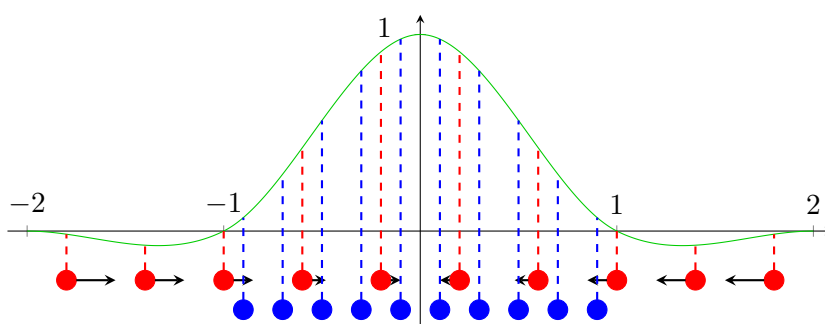


FIGURE 5.6 – Schématisation de l'effet d'une divergence négative (rouge : positions initiales des particules numériques ; bleu : positions des particules perturbées par la divergence).

5.2.3 Méthodes de correction

Afin de résoudre le problème de la présence de divergence au sein des champs de vitesse utilisés pour effectuer du transport lagrangien, plusieurs solutions sont envisageables. Une première solution pourrait consister à corriger le champ de vitesse de manière à imposer une divergence nulle en tout point de ce champ, par exemple en corrigeant les vecteurs aberrants du champ puis en déterminant le champ qui obéit aux équations de Navier-Stokes et dont la distance avec le champ expérimental est minimale au sens de la norme L_2 . Le transport lagrangien pourra ensuite être effectué sans aucune correction dans ce nouveau champ. Ce genre de méthode n'est pas abordé ici car il serait très lourd à mettre en œuvre et ne concerne pas les méthodes lagrangiennes qui nous intéressent ici. Une seconde méthode, dite du *flux de masse*, consiste à exploiter cette divergence pour appliquer une correction aux poids des particules de telle sorte que l'estimation de la concentration à partir de ces poids modifiés donne la même valeur que si la divergence était nulle. Enfin, une troisième méthode, dite de *renormalisation*, n'applique aucune correction directe ni à l'écoulement ni aux particules mais permet de prendre en compte la répartition anormale des particules lors de l'estimation de la concentration à partir des poids des particules.

5.2.3.1 Méthode du flux de masse

La méthode du flux de masse se base sur une modification des poids des particules. Cette méthode est simple à mettre en œuvre car elle ne nécessite que la détermination de la divergence de l'écoulement. Afin de déterminer le terme de correction à apporter aux poids des particules, il faut se baser sur l'équation de conservation suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla (\vec{u}C) = 0 \quad (5.1)$$

où C est la concentration transportée et \vec{u} la vitesse du fluide.

Habituellement, l'écoulement est à divergence nulle et induit que $\nabla \vec{u} = 0$, ce qui permet de réduire l'équation précédente à l'*équation de transport* :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \nabla C = 0 \quad (5.2)$$

Cependant, la présence de divergence induit que $\nabla \vec{u} \neq 0$, et l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \nabla C = -C \nabla \vec{u} \quad (5.3)$$

Ce nouveau terme apparu dans l'équation de transport peut être résolu de différentes manières. Ici nous choisissons de modifier le poids des particules et le système

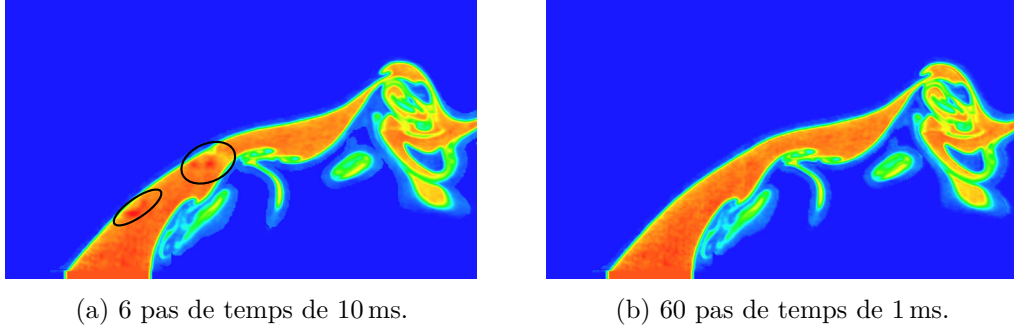


FIGURE 5.7 – Application de la correction de flux de masse au champ de concentration initial.

différentiel d'évolution des particules numérique devient :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}_i(t)}{dt} = \vec{u}(\vec{x}_i, t) \\ \frac{d\Omega_i(t)}{dt} = -\Omega_i(t) \nabla \vec{u}(\vec{x}_i, t) \end{cases} \quad (5.4)$$

Si ce système est résolu selon un schéma d'Euler d'ordre 1, l'évolution du poids des particules à chaque itération est simplement :

$$\Omega_i(t + \delta t) = \Omega_i(t) + \delta t \Omega_i(t) \nabla \vec{u}(\vec{x}_i, t) \quad (5.5)$$

Théoriquement cette méthode permet donc de corriger l'effet de la divergence sur le transport lagrangien. Un coût CPU supplémentaire est cependant introduit par le calcul de la divergence du champ de vitesse.

Cette méthode de correction est appliquée au cas du jet en écoulement transverse. Dans un premier temps, le cas de la section 5.2.2 précédente est reproduit en appliquant cette méthode avec deux pas de temps différents : le premier cas comporte 6 pas de temps de 10 ms (figure 5.7a) et le seconde 60 pas de temps de 1 ms (figure 5.7b). Sur ces deux figures, les particules dont le poids est au-dessous d'un certain seuil ont été supprimées afin de réduire le temps de calcul, d'où l'effet de coupure brutale tout autour du jet. Les ellipses noires marquent les zones où l'effet de la divergence reste visible. Dans ces deux cas, une étape de remaillage est effectuée à chacun des pas de temps. On remarque que pour les plus longs pas de temps (10 ms), certaines zones restent affectées par la divergence. Au contraire, plus aucun effet de celle-ci n'apparaît dans le cas du pas de temps le plus faible (1 ms).

Dans un second temps, l'état initial est vide, mis à part la zone d'injection et la simulation est cette fois effectuée sur l'ensemble de la durée de l'expérience, c'est-à-dire 7,5 s. De même, deux cas avec des pas de temps différents sont accomplis : des pas de temps de 1 ms et des pas de temps de 10 ms. Les résultats finaux sont présentés en figure 5.8.

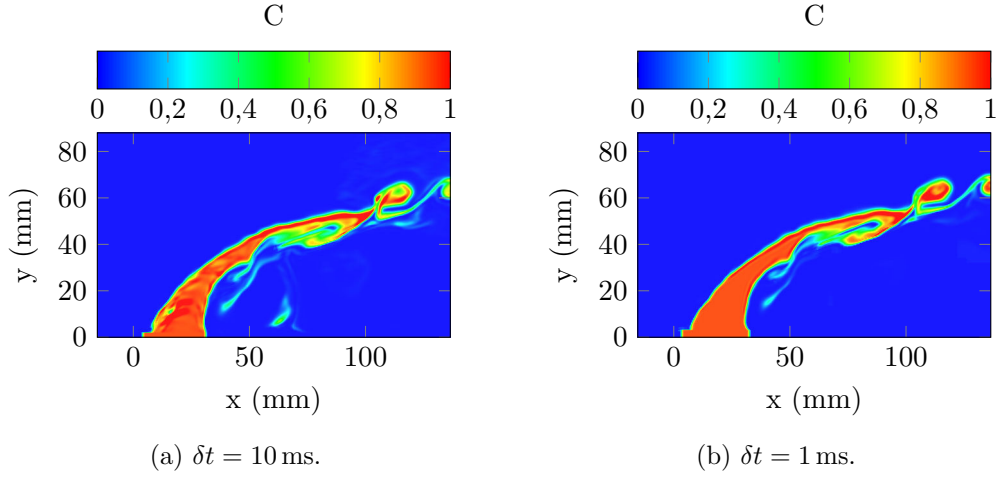


FIGURE 5.8 – Vue du plan médian à $t = 7,5$ s pour une correction du flux de masse avec deux pas de temps différents.

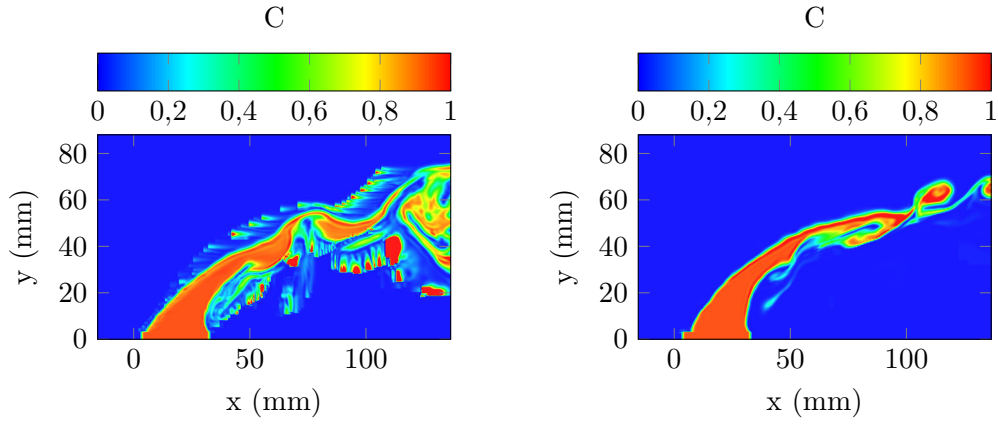
On observe une bien meilleure adéquation avec le résultat expérimental et même une complète disparition des îlots de concentration anormale dans le cas du pas de temps le plus faible. Malgré tout, on ne peut s'approcher que partiellement du résultat expérimental car du fait de la faible qualité des champs de vitesse, les particules transportant la concentration ne peuvent reproduire fidèlement les mouvements expérimentaux. Enfin, dans les deux cas étudiés, le surplus de temps de calcul a été de l'ordre de 10% à cause des calculs de divergence.

5.2.3.2 Méthode de renormalisation

La seconde solution proposée pour résoudre l'effet de la divergence est de le prendre en compte uniquement au niveau de l'estimation de la concentration. Ceci évite les coûts supplémentaires durant le calcul de l'évolution des particules et n'introduit qu'une modification simple lors de l'estimation de la concentration. Nous avons montré précédemment que lorsque la divergence du champ de vitesse n'est pas nulle, les particules s'écartent ou bien se rapprochent de manière anormale. Le résultat est que la condition 3.10 n'est plus respectée. Afin d'imposer le respect de cette condition, il est possible d'adapter les méthodes de renormalisation utilisées dans les méthodes SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics, [Gingold et Monaghan \(1977\)](#)). Ainsi, la valeur de la concentration en un point quelconque est estimée grâce à la nouvelle relation :

$$C(\vec{r}) = \frac{\sum_i C_i \zeta_\epsilon(\vec{r}_i - \vec{r})}{\sum_i \mathbb{1}_i \zeta_\epsilon(\vec{r}_i - \vec{r})} \quad (5.6)$$

où le dénominateur du second membre est le facteur de normalisation qui permet de corriger les irrégularités de répartition des particules numériques, notamment



(a) Exemple de champ (à $t = 2$ s) résultant de l'application directe de la méthode de renormalisation.

(b) Champ final (à $t = 7,5$ s) résultant de l'application de la méthode de renormalisation avec une couche de particules à poids nuls aux frontières.

ceux induits par la divergence du champ de vitesse. Cependant, une attention particulière doit être portée pour le traitement des interfaces entre les zones contenant des particules numériques et les zones sans particules. En effet, au niveau de cette interface, le faible nombre de particules peut conduire à des valeurs très faibles du facteur de normalisation, ce qui a pour effet d'amplifier les faibles¹ valeurs de concentration qui se trouvent près de ces frontières et les éventuelles erreurs qui peuvent exister sur le poids des particules. Ces erreurs se cumulant d'itération en itération, le résultat peut diverger au niveau de la frontière et cette erreur peut se propager aux particules voisines. Un exemple de résultat obtenu dans une situation très défavorable est présenté en figure 5.9a. Pour corriger ces effets de bord, une couche supplémentaire de particules à poids nuls est maintenue autour des particules qui transportent la concentration souhaitée. Ainsi, le facteur de normalisation conserve des valeurs suffisamment élevées pour ne pas entraîner une amplification incontrôlée des erreurs. La figure 5.9b présente le résultat final obtenu par cette méthode avec un pas de temps de 10 ms. Le résultat est identique à celui de la méthode du flux de masse utilisant un pas de temps de 1 ms. Cette méthode de renormalisation est donc beaucoup plus stable vis-à-vis du pas de temps.

Cependant, si cette méthode permet bien de corriger efficacement les effets de la divergence, elle peut rendre le traitement de la diffusion plus difficile. Notamment, elle corrige implicitement tous les effets diffusifs traités par vitesse de diffusion puisque dans cette méthode, la diffusion est modélisée par un regroupement ou un éloignement contrôlé des particules numériques. Il faut donc séparer le processus de correction de l'advection du processus de diffusion. La méthode de vitesse de diffusion doit donc s'opérer de la manière suivante :

1. Aux frontières, les particules dont le poids est en dessous d'un seuil arbitraire sont supprimées, ce qui crée une discontinuité qui est mal supportée par la méthode.

- le calcul des vitesses d'advection et de diffusion est effectué pour chaque particule numérique.
- les particules sont déplacées par la vitesse d'advection uniquement.
- les facteurs de renormalisation sont calculés à partir des nouvelles positions des particules numériques.
- les particules numériques sont déplacées selon la vitesse de diffusion.
- le remaillage est effectué en appliquant les coefficients de renormalisation calculés précédemment.

Il est donc possible de corriger les défauts issus de la présence de divergence dans l'écoulement pour les méthodes traitant la diffusion par une modification du poids des particules numériques ou bien par un déplacement contrôlé des particules numériques.

5.3 Méthode des moments

De la même manière que la méthode particulaire, la méthode des moments est sensible à la divergence. Par exemple, si l'on reprend l'exemple du nuage elliptique, la surface du support de celui-ci varie lorsqu'il traverse une zone dans laquelle la divergence est non-nulle, ce qui résulte à une incohérence des moments transportés : le moment d'ordre 0, qui représente la surface du nuage, ne peut pas varier, quelle que soit la valeur de la divergence, lorsque le développement de Taylor est effectué à l'ordre 1. Au contraire, les moments d'ordre 2 peuvent être affectés par la divergence puisque les dérivées du champ de vitesse apparaissent explicitement dans l'équation d'évolution des moments, d'où cette incohérence.

5.3.1 Évolution de la surface d'un nuage elliptique en présence de divergence

Dans le cas d'un nuage elliptique, il est possible de calculer le moment d'ordre 0, c'est-à-dire la surface du nuage, uniquement à partir des moments d'ordre 2. Pour cela, il faut premièrement déterminer les moments dans le repère de l'ellipse qui s'obtiennent en diagonalisant la matrice 4.19. Les valeurs propres de cette matrice seront donc :

$$\lambda_{+/-} = \frac{M_{x^2} + M_{y^2} \pm \sqrt{(M_{x^2} + M_{y^2})^2 + 4(M_{xy}^2 - M_{x^2}M_{y^2})}}{2} \quad (5.7)$$

où M_{x^2} , M_{y^2} et M_{xy} sont les moments d'ordre 2 de l'ellipse dans le repère globale et $\lambda_+ = \tilde{M}_{x^2}$ et $\lambda_- = \tilde{M}_{y^2}$ sont les moments d'ordre 2 de l'ellipse dans son repère local (le moment M_{xy} étant nul par construction dans ce repère).

Or, dans ce repère local, nous pouvons écrire le système suivant :

$$\begin{cases} \tilde{M}_{x^2} = \frac{\pi a^3 b}{4} \\ \tilde{M}_{y^2} = \frac{\pi a b^3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4\tilde{M}_{y^2}}{\pi b^3} \\ b = \frac{4\tilde{M}_{x^2}}{\pi a^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} \left(\frac{\tilde{M}_{x^2}^3}{\tilde{M}_{y^2}} \right) \\ b = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} \left(\frac{\tilde{M}_{y^2}^3}{\tilde{M}_{x^2}} \right) \end{cases} \quad (5.8)$$

Ce qui permet de déterminer la surface uniquement à partir des moments d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} S &= \pi \times a \times b = 2\sqrt{\pi} \tilde{M}_{x^2}^{1/4} \tilde{M}_{y^2}^{1/4} \\ S &= 2\sqrt{\pi} \left(\frac{M_{x^2} + M_{y^2} + \sqrt{(M_{x^2} + M_{y^2})^2 + 4(M_{xy}^2 - M_{x^2}M_{y^2})}}{2} \right)^{1/4} \\ &\quad \times \left(\frac{M_{x^2} + M_{y^2} - \sqrt{(M_{x^2} + M_{y^2})^2 + 4(M_{xy}^2 - M_{x^2}M_{y^2})}}{2} \right)^{1/4} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ainsi, cette surface doit toujours être égale au moment M_{00} , ce qui n'est pas le cas en présence de divergence.

Pour illustrer cette incohérence, un nuage est injecté dans un écoulement dont l'équation est :

$$\begin{cases} u = 1 + 2x \times \exp(-10(x^2 + y^2)) \\ v = 2y \times \exp(-10(x^2 + y^2)) \end{cases} \quad (5.10)$$

Cet écoulement présente une zone de forte divergence autour de $(x = 0; y = 0)$, comme représenté sur la figure 5.10. Un nuage est injecté dans celui-ci en $(-5; 0)$ et de rayon $R = 2 \times 10^{-3}$ mm. L'impact de la divergence sur les moments d'ordre 2 apparaît sur la figure 5.11 : la surface calculée à partir de ces moments n'est pas constante, contrairement au moment M_{00} . Or, ces deux grandeurs devraient rester égales à tout instant, ce qui confirme l'incohérence des moments.

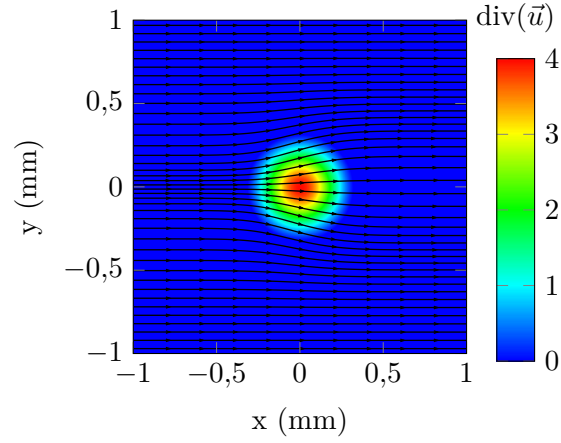


FIGURE 5.10 – Champ analytique défini par le système 5.10 avec 40 lignes de courant. La divergence est représentée par l'échelle de couleurs.

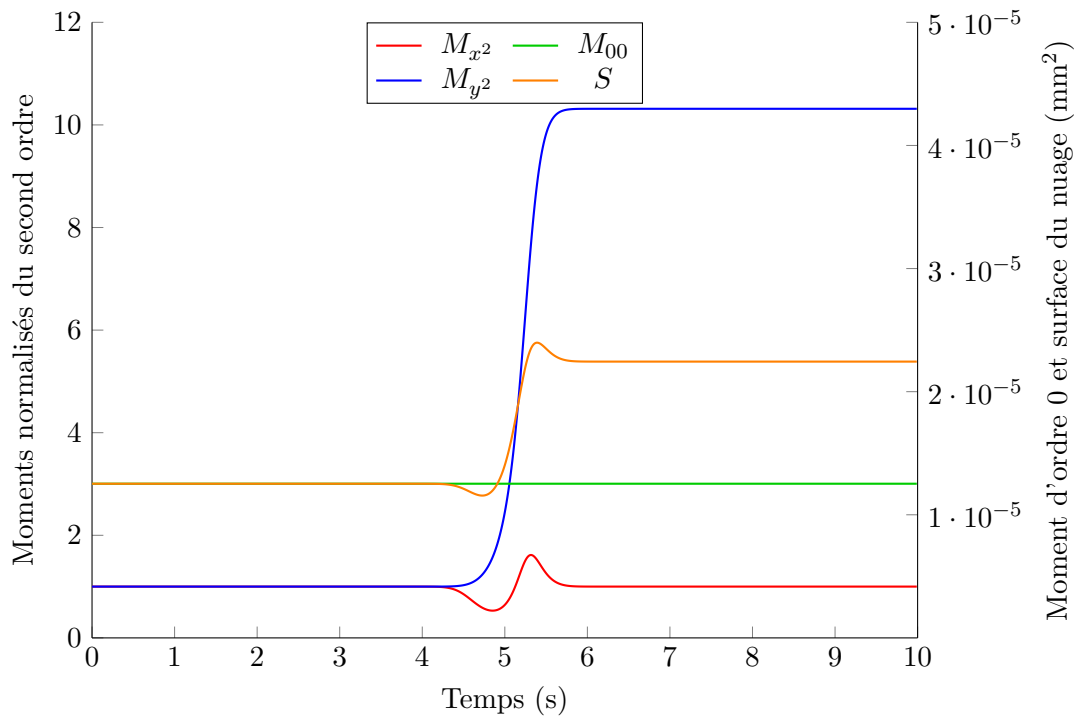


FIGURE 5.11 – Évolution des moments d'un nuage de grains dans l'écoulement 5.10 ainsi que de sa surface calculée à partir des moments d'ordre 2.

5.3.2 Méthode de correction

Pour le développement de cette méthode de correction, nous repartons de l'équation 4.4 dans laquelle nous faisons apparaître la divergence :

$$\begin{aligned}
\frac{dM_{x^m y^n}^i}{dt} &= \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^m (y' - y_i)^n \left(\frac{\partial C(\vec{r}')}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}(\vec{r}') C(\vec{r}')) \right) dx' dy' \\
&+ m \int_{\sigma_i} \left(u(\vec{r}') - u(\vec{r}_i') \right) \left((x' - x_i)^{m-1} (y' - y_i)^n C(\vec{r}') \right) dx' dy' \\
&+ n \int_{\sigma_i} \left(v(\vec{r}') - v(\vec{r}_i') \right) \left((x' - x_i)^m (y' - y_i)^{n-1} C(\vec{r}') \right) dx' dy' \\
&= \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^m (y' - y_i)^n \left(\frac{\partial C(\vec{r}')}{\partial t} + \vec{u}(\vec{r}') \nabla C(\vec{r}') \right) dx' dy' \\
&+ \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^m (y' - y_i)^n (C(\vec{r}') \nabla \vec{u}(\vec{r}')) dx' dy' \\
&+ m \int_{\sigma_i} \left(u(\vec{r}') - u(\vec{r}_i') \right) \left((x' - x_i)^{m-1} (y' - y_i)^n C(\vec{r}') \right) dx' dy' \\
&+ n \int_{\sigma_i} \left(v(\vec{r}') - v(\vec{r}_i') \right) \left((x' - x_i)^m (y' - y_i)^{n-1} C(\vec{r}') \right) dx' dy'
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Or, si l'on se place dans le cas du développement de Taylor à l'ordre 1, la divergence est constante sur le support de la particule. Le terme faisant apparaître la divergence, noté A , devient donc :

$$A = \nabla(\vec{u}(\vec{r}')) M_{x^m y^n} \tag{5.12}$$

On obtient donc que la correction à apporter au terme $\frac{dM_{x^m y^n}^i}{dt}$ est :

$$-\nabla(\vec{u}(\vec{r}')) M_{x^m y^n} \tag{5.13}$$

Finalement, l'équation d'évolution des moments devient :

$$\begin{aligned}
\frac{dM_{x^m y^n}^i}{dt} &= m \frac{\partial u}{\partial x} M_{x^m y^n} + m \frac{\partial u}{\partial y} M_{x^{m-1} y^{n+1}} + n \frac{\partial v}{\partial y} M_{x^m y^n} + n \frac{\partial v}{\partial x} M_{x^{m+1} y^{n-1}} \\
&- \nabla(\vec{u}(\vec{r}')) M_{x^m y^n} \\
&= m \frac{\partial u}{\partial x} M_{x^m y^n} + m \frac{\partial u}{\partial y} M_{x^{m-1} y^{n+1}} + n \frac{\partial v}{\partial y} M_{x^m y^n} + n \frac{\partial v}{\partial x} M_{x^{m+1} y^{n-1}} \\
&- \left(\frac{\partial \vec{u}(\vec{r}')}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}')}{\partial y} \right) M_{x^m y^n} \\
&= (m-1) \frac{\partial u}{\partial x} M_{x^m y^n} + m \frac{\partial u}{\partial y} M_{x^{m-1} y^{n+1}} \\
&+ (n-1) \frac{\partial v}{\partial y} M_{x^m y^n} + n \frac{\partial v}{\partial x} M_{x^{m+1} y^{n-1}}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Lorsque l'on applique cette correction au cas précédent, la surface calculée à partir des moments d'ordre 2 reste bien égale au moments d'ordre 0 quelle que soit la valeur de la divergence, comme le montre la figure 5.12.

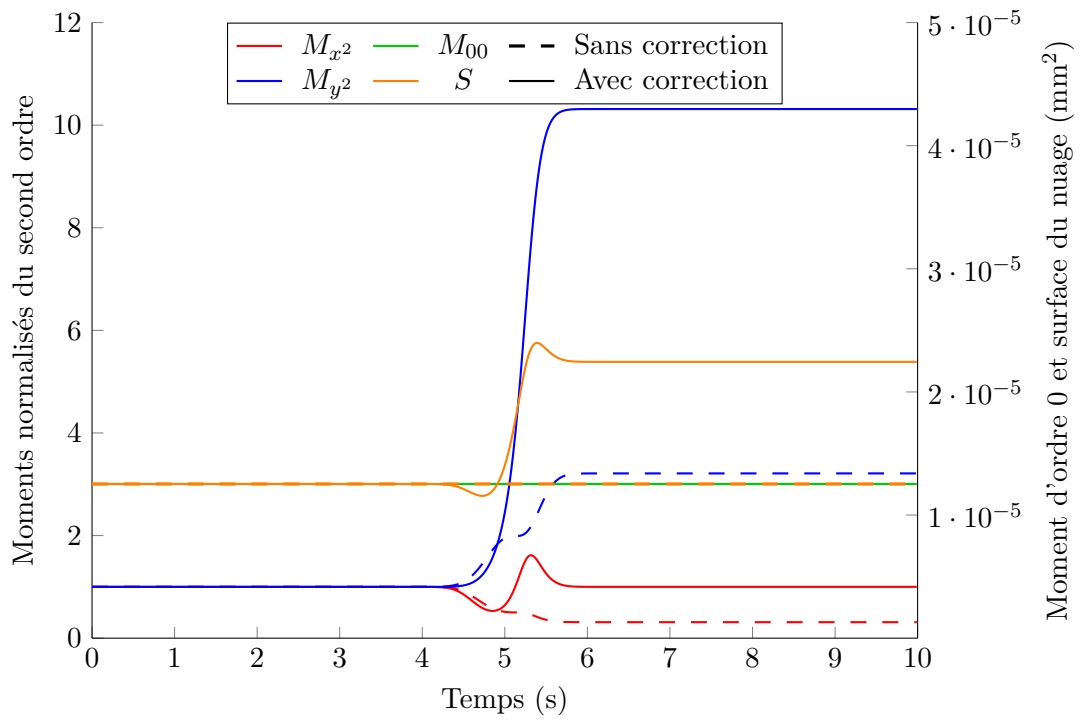


FIGURE 5.12 – Évolution des moments d’un nuage de grains dans l’écoulement 5.10 ainsi que de sa surface calculée à partir des moments d’ordre 2.

5.4 Conclusion

Le transport numérique de grains ou d'une concentration en grains dans un champ de vitesse a de très nombreuses applications. Généralement, l'évolution du champ de vitesse ainsi que l'évolution des grains ou de leur concentration est résolue par le même solveur qui assure que la divergence du champ de vitesse est nulle avant d'entamer l'étape de transport des grains. Cependant, si cette étape n'est pas effectuée ou bien si les champs de vitesses proviennent de mesures expérimentales, dont les erreurs de mesure ne peuvent être totalement supprimées, la divergence peut ne pas être nulle en tout point à chaque instant. L'impact de cette divergence a été démontré dans le cas de deux méthodes lagrangiennes de transport de concentration en grains. Des méthodes de correction ont été proposées et celles-ci permettent bien de contraindre la valeur de la concentration telle qu'elle serait si la divergence de l'écoulement était rigoureusement nulle. Néanmoins, si les valeurs de la concentration sont bien corrigées, la divergence influe malgré tout sur les trajectoires des particules numériques ce qui induit une erreur sur le résultat obtenu. Cette erreur ne peut être corrigée sur les méthodes car il faudrait prendre en compte l'ensemble de l'écoulement pour déterminer toutes ses propriétés et ainsi déduire la correction optimale à appliquer. Cette démarche serait identique à reconstruire un champ de vitesse complet corrigé de telle sorte que sa divergence soit nulle, ce qui serait extrêmement coûteux et n'est pas l'objectif de ce travail.

CHAPITRE 6

Résultats

Sommaire

6.1 Milieux poreux	136
6.1.1 Génération de l'écoulement	136
6.1.2 Application de la méthode des moments	137
6.1.3 Conclusion	140
6.2 Mascaret ondulant	140
6.2.1 Méthode tracker	142
6.2.2 Méthode particulaire	159
6.2.3 Méthode des moments	178
6.2.4 Conclusion	184

Dans ce chapitre, les principaux résultats obtenus au cours de ce travail de thèse sont présentés. Ils concernent deux applications distinctes : dans un premier temps nous nous intéresseront à l'étude du transport de traceurs inertes dans les milieux poreux par la méthode des moments en comparaison à une méthode tracker dans laquelle la vitesse des grains est égale à la vitesse du fluide puis, dans un second temps, toutes les méthodes exposées précédemment seront appliquées à l'étude du transport sédimentaire dans les mascarets. Dans ces deux applications le transport de grains sédimentaires ou de traceurs inertes se traite numériquement par des techniques similaires.

Les deux applications se différencient par l'origine de l'hétérogénéité de l'écoulement. Dans le cas des milieux poreux, l'écoulement est en régime de **Stokes** à l'échelle des pores et obéit à la loi de **Darcy (1856)** à l'échelle macroscopique. Cette loi de **Darcy** est paramétrée par la grandeur K , la conductivité hydraulique du milieu poreux. C'est alors la variation spatiale de ce paramètre K qui introduit l'hétérogénéité du milieu à l'échelle macroscopique. Il existe plusieurs modèles mathématiques pour reproduire cette hétérogénéité. Dans cette application, la conductivité hydraulique K suit une loi de distribution log-normale qui est définie par une fonction de covariance exponentielle et une moyenne nulle. Cette hétérogénéité de K provoque une fluctuation de la vitesse du fluide à l'échelle macroscopique ce qui entraîne une dispersion des grains. Au contraire, dans le cas du mascaret, l'hétérogénéité provient de la turbulence de l'écoulement. À petite échelle, la turbulence est caractérisée par des fluctuations rapides et localisées de la vitesse. À grande échelle, ces fluctuations peuvent être modélisées de nombreuses manières, notamment par l'intermédiaire

de valeurs moyennes de la vitesse accompagnées de statistiques turbulentes. Cette hétérogénéité est intégrée dans l'équation de transport des grains sédimentaires par des modèles de dispersion qui postulent que ce mécanisme de dispersion s'apparente à un mécanisme de diffusion dont le coefficient de diffusion est régi par l'intensité de la turbulence.

Une seconde différence majeure caractérise cependant ces deux types d'écoulements : l'écoulement dans les milieux poreux est stationnaire tandis que l'écoulement de mascaret est instationnaire. Cette différence fondamentale du point de vue physique n'a toutefois que peu d'influence sur les méthodes mises en place pour leur étude, outre un accroissement du temps de calcul dans le cas instationnaire.

6.1 Milieux poreux

L'étude des milieux poreux a de nombreuses applications dans les domaines géosciences. La compréhension des écoulements fluides et de la propagation d'espèce dans ce type de milieux est un problème clé pour la gestion des ressources en eau et notamment pour sa qualité, pour la recherche et l'exploitation de ressources pétrolières ou bien encore pour le stockage à très long terme des déchets nucléaires.

Afin de quantifier ces phénomènes, on étudie la vitesse de dispersion d'un traceur passif dans l'écoulement qui a lieu entre les pores du milieu. Habituellement, cet écoulement est modélisé à grande échelle par une loi de [Darcy \(1856\)](#). Ce modèle, bien qu'idéalisé, permet une bonne représentation du comportement d'un milieu poreux non fracturé ([Feehley et al., 2000](#); [Benson et al., 2001](#)).

6.1.1 Génération de l'écoulement

L'écoulement est généré à l'aide du code calcul PARADIS ([Beaudoin et al., 2013](#)) qui permet de générer un champ de conductivité hydraulique aléatoire puis de déterminer le champ de vitesse respectant la loi de [Darcy](#) et la conservation de la masse à partir de ce champ. Il utilise une méthode de volumes finis pour la partie fluide et permet de transporter des grains sédimentaires passifs dans ce fluide afin de déterminer leur vitesse de dispersion et peut effectuer une étude de convergence par méthode de Monte-Carlo.

On considère un domaine rectangulaire bidimensionnel de dimensions $L_x \times L_y$ divisé en $N_x \times N_y$ cellules. L'écoulement moyen se fait selon la direction X qui est appelée direction longitudinale. Le milieu poreux modélisé est considéré comme isotrope et dont la conductivité hydraulique K varie aléatoirement en suivant une distribution log-normale d'écart-type σ . La covariance de cette distribution est donnée par la relation :

$$\text{cov}(\ln[K(\vec{r})]) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\|\vec{r}\|}{\lambda}\right) \quad (6.1)$$

où $\|\vec{r}\|$ est la distance séparant deux points quelconques du domaine et λ est la longueur de corrélation. C'est cette longueur de corrélation qui permet de passer

du problème adimensionné au problème physique. La valeur de la variance σ^2 varie habituellement entre 0 et 10 : pour $\sigma^2 \leq 1$ l'hétérogénéité est faible et des solutions analytiques peuvent être déterminées tandis que pour $\sigma^2 \geq 1$ l'hétérogénéité est forte et il n'est alors pas possible de déterminer des solutions analytiques.

À partir de cette conductivité hydraulique, l'écoulement peut être déterminé de manière adimensionnelle en associant la loi de **Darcy** à une équation de conservation :

$$\vec{u} = -K\nabla h \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (6.3)$$

où \vec{u} est le champ de vitesse de l'écoulement et h est la charge hydraulique dont les conditions aux limites sont périodiques en $y = 0$ et $y = L_y$ et sont de type Dirichlet en entrée et en sortie, fixées à $h = 0$ en $x = 0$ et $h = 1$ en $x = L_x$. Ce système est projeté sur la grille du domaine et résolu par une méthode de volumes finis. La taille des mailles est fixée de telle sorte qu'elles soient 10 fois plus petites que la longueur de corrélation. Pour un problème physique donné, on a donc la représentation adimensionnelle suivante :

$$L_x = N_x \times \frac{\lambda}{10} \quad (6.4)$$

$$L_y = N_y \times \frac{\lambda}{10} \quad (6.5)$$

$$\vec{u}_R = \vec{u} \times \frac{\lambda}{10} \quad (6.6)$$

où \vec{u}_R est la vitesse dans l'espace physique. L'écoulement ainsi généré est présenté en figure 6.1.

6.1.2 Application de la méthode des moments

La vitesse de dispersion du traceur dans le milieu poreux considéré est déterminée à partir de l'évolution des moments de la distribution des grains puisqu'elle est égale à leur dérivée temporelle. La méthode des moments semble donc toute indiquée pour déterminer cette grandeur de manière précise beaucoup plus rapidement que les méthodes de tracker habituelles. De la même manière que dans le chapitre 4, un nuage de 1246 grains sédimentaires est injecté puis transporté par l'écoulement et comparée au résultat de la méthode des moments dans la même configuration initiale. La diffusion moléculaire est négligée dans cette étude. La figure 6.2 présente l'évolution des moments d'un nuage de grains sédimentaires évoluant dans le champ de vitesse présenté précédemment (figure 6.1). Ceux-ci sont calculés pour les deux méthodes (méthode tracker et méthode des moments), avec et sans division des particules numériques dans le cas de la méthode des moments. Dans le cas sans division (figure 6.2a), les résultats donnés par les deux méthodes sont très proches jusqu'à $t = 400$ s mais divergent nettement ensuite. Cet écart est dû à une forte

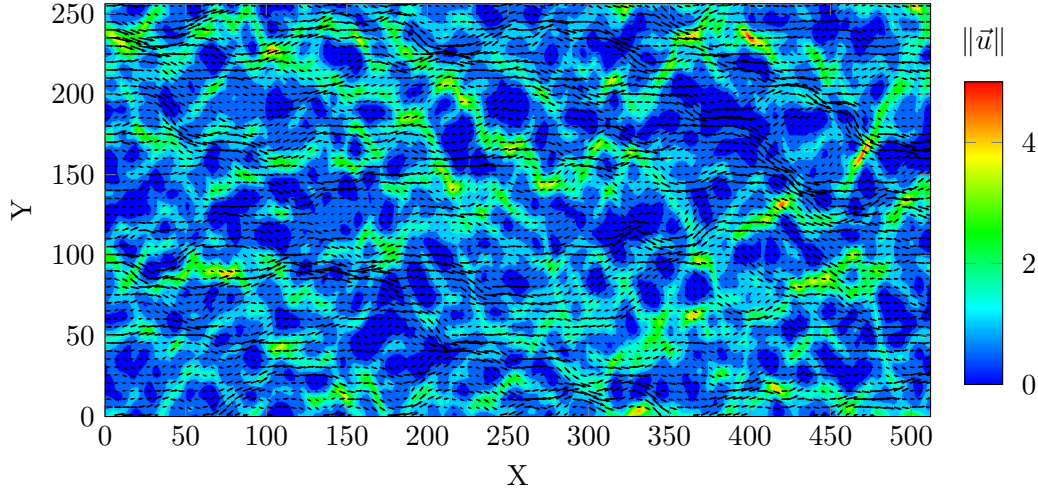


FIGURE 6.1 – Champ de vitesse adimensionné au sein du milieu poreux généré par le code de calcul PARADIS (Beaudoin *et al.*, 2013) pour une variance $\sigma^2 = 1$.

courbure du nuage de grains dans cette zone, ce qui ne peut pas être représenté par la méthode des moments sans division. Au contraire, lorsque la division est activée en limitant la taille des particules numériques à 2 mailles du domaine de calcul et en fixant $\varepsilon = 0.55$, l'écart entre les deux méthodes reste très faible tout au long de la trajectoire du nuage de grains.

La méthode des moments permettant de suivre l'évolution des moments d'un petit nuage de grains au sein d'un milieu poreux, nous cherchons maintenant à déterminer la dispersion au sein de ce milieu. Pour cela, un nuage plus large doit être injecté dans un domaine plus étendu afin de pouvoir converger vers une bonne représentation statistique. La dérivée temporelle des moments de nuage doit alors tendre vers une valeur constante qui sera la vitesse de dispersion recherchée. Dans cette étude, un domaine bidimensionnel de 2048×512 mailles est choisi et l'étude de Monte-Carlo est effectuée sur 30 champs aléatoires de variance $\sigma^2 = 1$. Dans le cas bidimensionnel la dispersion latérale est nulle et seule la dispersion longitudinale est considérée et représentée sur la figure 6.3. Sur cette figure, les droites analytique (Gelhar, 1993) et issues du code de calcul PARADIS sont des solution asymptotiques tandis que le résultat numérique issu de la méthode des moments est l'évolution moyenne de la dispersion au cours du temps qui est supposée tendre vers cette asymptote. La solution numérique issue de la méthode des moments converge bien vers la solution analytique malgré des fluctuations du fait du faible nombre de réalisations effectuées pour l'algorithme de Monte-Carlo. La méthode des moments est donc bien capable de déterminer la valeur de la dispersion longitudinale dans ce cas, tout en conservant l'avantage en terme de temps de calcul par rapport aux méthodes classiques.

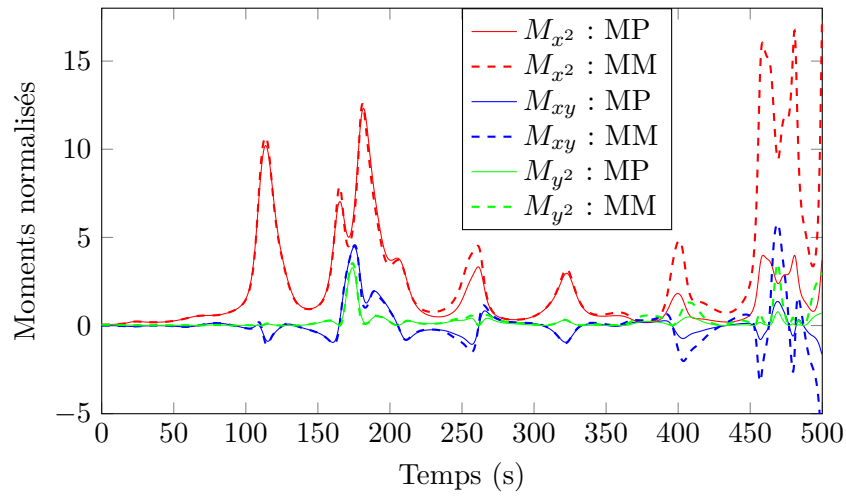
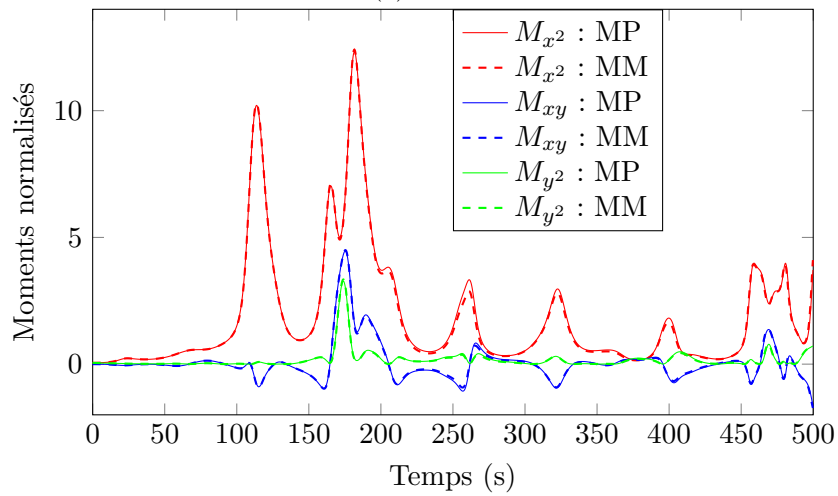
(a) $\varepsilon = 0$ (b) $\varepsilon = 0.55$

FIGURE 6.2 – Évolution des moments d'un nuage de grains sédimentaires évoluant dans un milieu poreux.

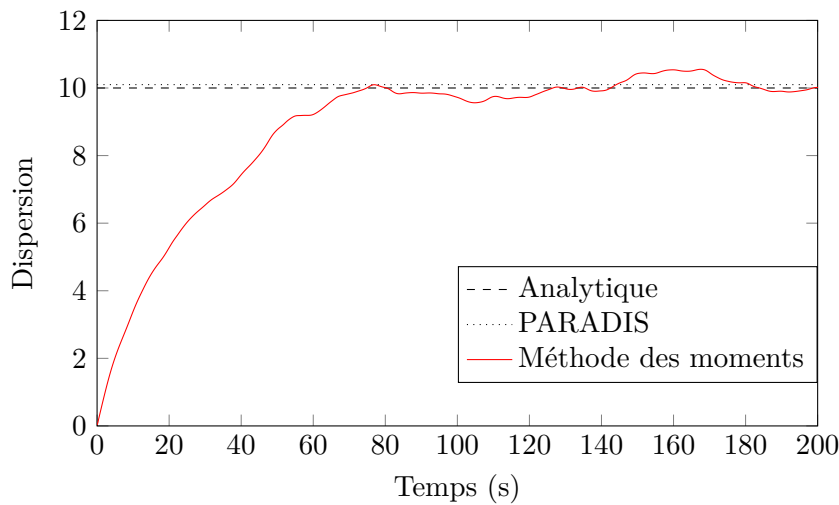


FIGURE 6.3 – Évolution de la vitesse de dispersion convergeant vers la solution analytique.

6.1.3 Conclusion

Les premiers résultats concernant les milieux poreux ont montré la pertinence de la méthode des moments pour cette application. L'évolution des moments de petits nuages de grains sédimentaires permettent de calculer la dispersion de ces grains dans ce milieu hétérogène. Le calcul de cette dispersion est très importante en géosciences car elle permet par exemple de quantifier la vitesse de migration d'un polluant dans un sol dont il suffit de connaître la porosité et l'hétérogénéité. La méthode des moments pourrait donc permettre le calcul de cette caractéristique d'un milieu donné de manière beaucoup plus rapide que les méthodes actuelles.

6.2 Mascaret ondulant

Plusieurs études se sont déjà focalisées sur le transport sédimentaire que le passage d'un mascaret ondulant dans un fleuve met en jeu. Cependant, ces études portaient essentiellement sur le transport global, c'est à dire sur une échelle de temps englobant le passage du front du mascaret et des éteules (*Chen et al., 1990*), ou bien sur des mesures ponctuelles, notamment grâce à des ADV, ce qui rendait difficile l'établissement de conclusions sur le comportement d'un nuage de grains. Par ailleurs, les mesures en milieu naturel peuvent difficilement discriminer les différents types de grains, que ce soit de par leur taille ou bien leur masse volumique. Ainsi, les statistiques de ces mesures incluent de nombreux effets dont ceux induits par les comportements différents selon le type de grains. Au contraire, nous souhaitons ici décrire le transport à une échelle intermédiaire, c'est à dire à l'échelle du front et de quelques éteules sur le plan temporel, soit une durée d'environ cinq

secondes, et à l'échelle de nuages de grains petits mais non ponctuels, soit une taille de l'ordre d'une dizaine de centimètres, tout en maîtrisant les paramètres des grains sédimentaires.

L'étude se concentre sur le cas du ressaut de type réflexion d'un courant sur une paroi car ce type de ressaut est proche d'un mascaret de marée (voir chapitre 1) et car les mesures expérimentales en laboratoire du projet [ANR Mascaret](#) ont été faites sur ce type d'écoulement. Deux écoulements sont étudiés pour deux conditions de fermeture de la porte différentes mais tels que les nombres de Froude Fr_B (équation 1.2) sont proches afin de pouvoir comparer les résultats. Ces deux écoulements ont été générés par ([Simon, 2013](#), p. 125-135) grâce au code [Thétis](#). Le premier cas, appelé cas A dans la suite, est un ressaut généré par la fermeture complète d'une porte verticale dont le nombre de Froude est $Fr = 1,13$. Le niveau initial est $h_1 = 16,5$ cm avec une vitesse de $V_1 = 0,23$ m/s et le niveau obtenu après le passage du ressaut est $h_2 = 19,7$ cm avec une vitesse $V_2 = 0$ m/s. Le front se déplace à la vitesse $V_B = 1,21$ m/s. Le second cas, appelé ensuite cas B, est un ressaut généré par la fermeture partielle d'une porte verticale dont le nombre de Froude est $Fr = 1,17$. Dans ce cas, le niveau initial est $h_1 = 14$ cm avec une vitesse $V_1 = 0,8$ m/s et le niveau après le passage du ressaut est $h_2 = 18$ cm avec une vitesse $V_2 = 0,54$ m/s. Le front se déplace à la vitesse $V_B = 0,57$ m/s. La section obstruée est la partie supérieure de l'écoulement (de 10 à 14 cm du fond), la partie inférieure (de 0 à 10 cm du fond) pouvant s'écouler librement vers l'aval. Dans la suite, le temps $t = 0$ s correspond à l'instant d'obstruction de l'écoulement par la fermeture de la porte.

Ces deux écoulements sont représentés sur les figures 6.4a et 6.4b sur lesquelles apparaissent les lignes de courant instantanées ainsi que l'amplitude de la composante horizontale de la vitesse (échelle de couleurs). On observe une différence fondamentale entre les lignes de courant instantanées des deux cas A et B. Dans le cas A, les lignes de courant commencent et se terminent au niveau de la surface libre de l'écoulement, sauf avant le front du ressaut où elles tendent vers l'horizontal. Ce comportement est dû à l'annulation du courant moyen en aval du front du ressaut qui apparaît sur l'échelle de couleurs. Au contraire, dans le cas B, les lignes de courant sont horizontales avant le front du ressaut et ondulent ensuite jusqu'à tendre à nouveau vers l'horizontal une fois les éteules passées. Seules les lignes de courant proches de la surface libre peuvent la rencontrer. Là encore, ce comportement est dû au courant moyen qui, cette fois-ci, ne s'annule pas après le passage du front du ressaut. Des vues agrandies de la zone proche du fond sous la crête de front ($x = 2,5$ m) sont présentées sur les figures 6.5a et 6.5b. Dans les deux cas, une forte inversion du courant est observée dans cette zone. Cette particularité a été observée expérimentalement par [Furgerot \(2014\)](#). Cependant, cette inversion ne donne pas lieu à une zone de recirculation dans le cas A, au contraire du cas B. Cette zone, bien que très localisée au fond (environ 0,5 cm de hauteur dans le cas A et 1 cm de hauteur dans le cas B), pourra avoir un effet important sur les trajectoires des grains sédimentaires qui la rencontrent.

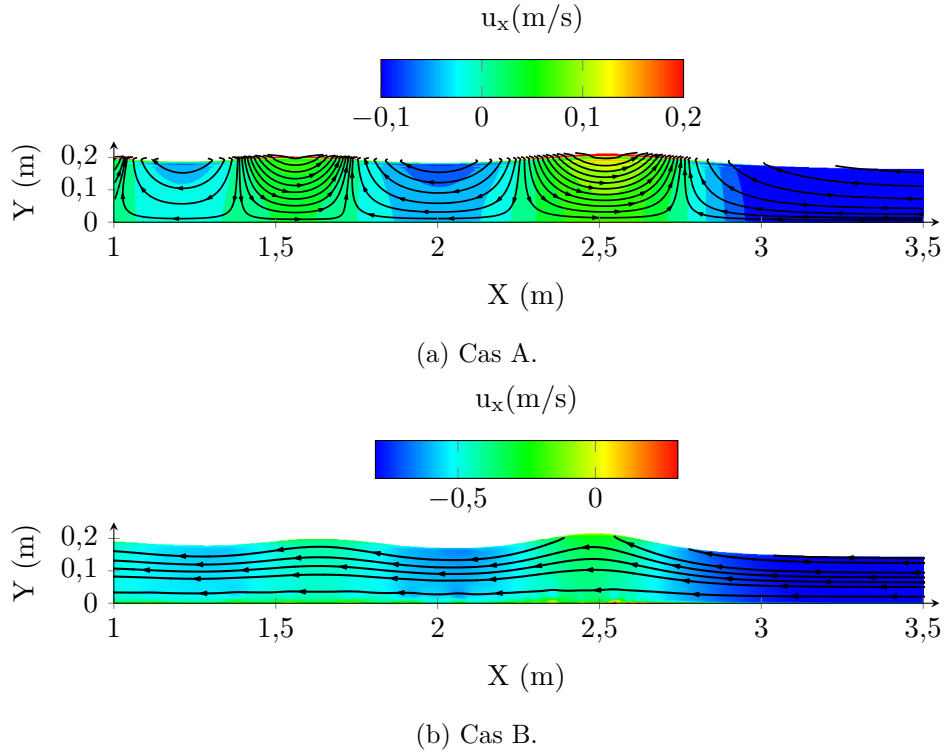
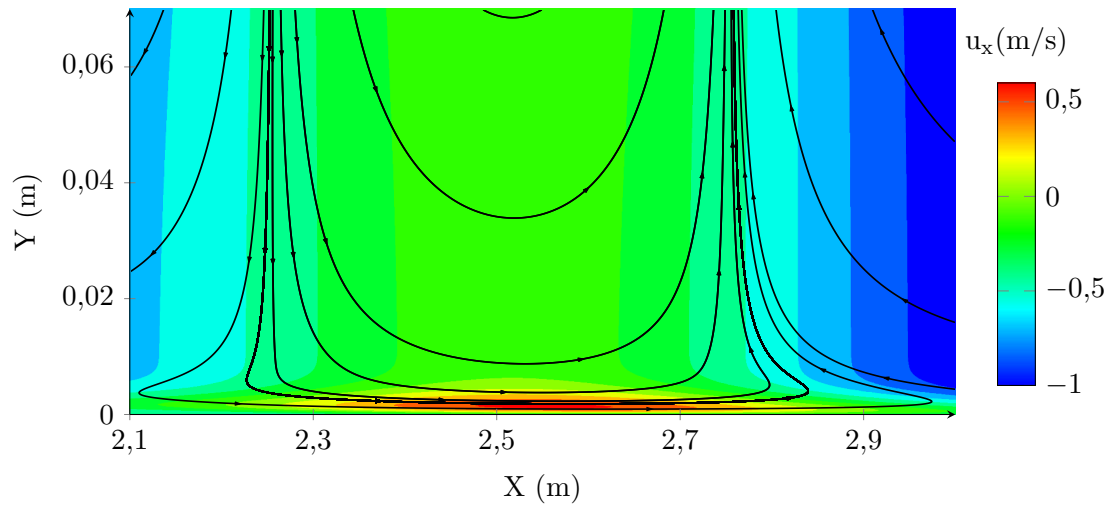


FIGURE 6.4 – Représentation des deux écoulements étudiés lorsque le front du ressaut se trouve en $x = 2,5$ m.

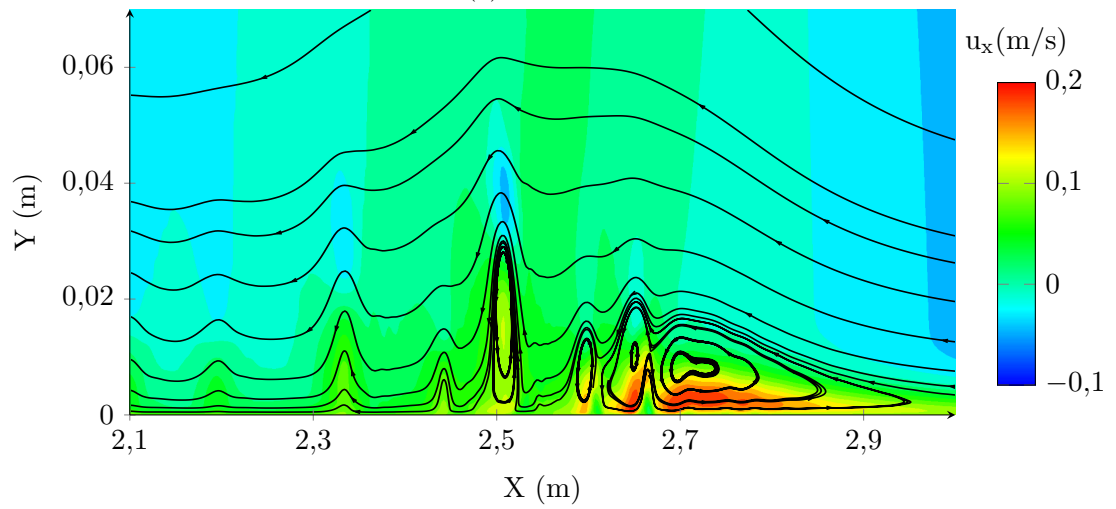
Le type de ressaut représenté par le cas A, c'est-à-dire lorsque le courant après le passage du front est très faible voire nul, sera dit *dominé par les éteules*. En effet, les lignes de courant après le passage du front dans ce cas sont très proches de celles que l'on rencontre dans le cas d'une houle de Stokes. Au contraire, le cas B sera dit *dominé par le courant*, c'est-à-dire que le courant après le front reste sensible au point que les lignes de courant ne font qu'onduler et peuvent malgré tout traverser la majeure partie de l'écoulement sans discontinuité, sauf celles proches de la surface libre.

6.2.1 Méthode tracker

Grâce à la méthode tracker présentée au chapitre 2, il est possible de suivre précisément la trajectoire d'un grain particulier. Nous allons utiliser cette méthode pour déterminer les trajectoires caractéristiques des grains sédimentaires en suspension lors du passage d'un ressaut. Dans un premier temps, la dispersion des grains sédimentaires due à la turbulence de sous-maille sera évaluée puis, dans un second temps, les trajectoires de grains injectés à différentes hauteurs et avec différentes masses volumiques seront caractérisées.



(a) Cas A.



(b) Cas B.

FIGURE 6.5 – Agrandissement de la zone proche du fond sous la crête de front lorsque le front du ressaut se trouve en $x = 2,5$ m.

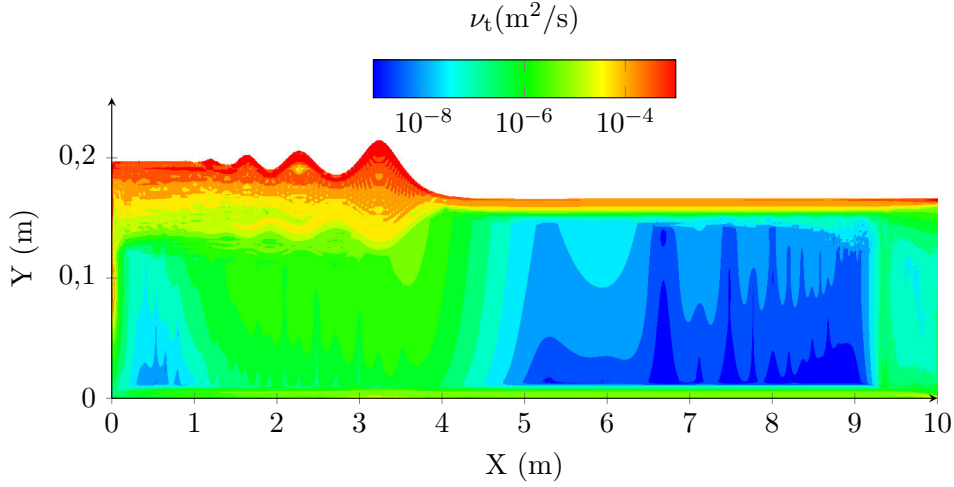


FIGURE 6.6 – Viscosité turbulente déterminée par le code **Thétis** (Simon, 2013) dans le cas du ressaut dominé par les éteules (cas A), 3,1 s après la fermeture de la porte et 0,98 s après l’injection des grains sédimentaires.

6.2.1.1 Évaluation de la dispersion due à la turbulence de sous-maille

Dans le cas A (figure 6.6), la viscosité turbulente de sous-maille calculée par le code **Thétis** (Simon, 2013) est de l’ordre de $\nu_t \sim 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ dans tout l’écoulement avant le passage du ressaut, sauf proche de la surface libre et du fond où elle peut respectivement atteindre $\nu_t \sim 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ et $\nu_t \sim 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$. Après le passage du front, la viscosité turbulente est d’environ $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ dans la majeure partie de l’écoulement mais peut atteindre $10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ dans la zone très proche de la surface libre. Dans le cas B (figure 6.7), la viscosité turbulente de sous-maille est de l’ordre de $\nu_t \sim 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ dans la partie supérieure de l’écoulement et de l’ordre $\nu_t \sim 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ dans la couche limite avant le passage du ressaut. Après le passage du front du ressaut, cette viscosité turbulente de sous-maille est comprise dans l’intervalle $10^{-4} \geq \nu_t \geq 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ à la fois dans la partie supérieure et la couche limite. Ces valeurs sont faibles du fait qu’aucune turbulence n’est injectée en entrée du canal. Dans les deux cas, l’évolution temporelle de cette viscosité est très proche d’une translation horizontale de l’ensemble du domaine à la vitesse du front (ceci n’est plus vrai à environ 1 m des extrémités du canal).

Pour évaluer l’intensité de la dispersion des grains sédimentaires induite par cette turbulence de sous-maille, un grand nombre de grains ($N = 100000$ grains) sont injectés à une même position, chacun évoluant ensuite librement d’une part par l’advection due au champ de vitesse et d’autre part avec une composante aléatoire représentant la turbulence de sous-maille, comme expliqué en section 2.4.3. Ces grains sont injectés au point de coordonnées ($x = 5 \text{ m}; y = 0,1 \text{ m}$) dans les deux cas. Le nombre de Schmidt turbulent est fixé à 1, c’est à dire une valeur volontairement élevée afin d’être sûr de ne négliger aucune contribution. La figure 6.8 présente la

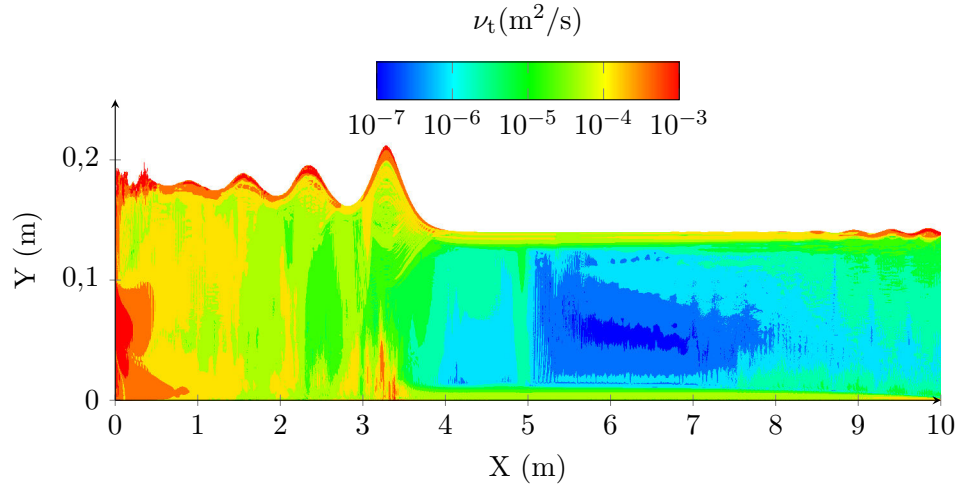


FIGURE 6.7 – Viscosité turbulente déterminée par le code **Thétis** (Simon, 2013) dans le cas du ressaut dominé par le courant (cas B), 6,1 s après la fermeture de la porte et 1,25 s après l’injection des grains sédimentaires.

trajectoire du centre de masse de l’ensemble des grains dans les deux cas, pour différentes masses volumiques des grains. On remarque que les formes globales des trajectoires sont très différentes selon le cas A ou B, du fait de la présence ou de l’absence de courant moyen après le passage du front du ressaut. Une étude plus détaillée de ces trajectoires sera effectuée par la suite en section 6.2.1.2.

La figure 6.9 présente l’évolution des moments d’ordre 2 des nuages de grains ainsi que leur hauteur par rapport au fond dans les mêmes configurations. L’évolution de ces moments est directement liée à la vitesse de dispersion des grains du fait de la turbulence de sous-maille. L’effet dû à l’écoulement est faible en comparaison car les nuages sont très petits. Le tracé de l’évolution de $Y(t)$ du centre de masse des nuages en parallèle de l’évolution des moments permet de situer le grain par rapport au front du ressaut puisque leur élévation suit celle de la surface libre. Dans le cas A, c’est-à-dire lorsque le ressaut est dominé par les éteules, la dispersion des grains sédimentaires augmente de manière quasi-exponentielle jusqu’à l’arrivée du front, c’est-à-dire pour $t \leq 1,5$ s, et augmente ensuite linéairement. Dans ce cas, l’intensité de la viscosité turbulente calculée par le code **Thétis** est affectée par la présence du front du ressaut plusieurs mètres en amont de celui-ci. Cette particularité n’a cependant pas été confirmée expérimentalement dans le cadre du projet **ANR Mascaret**. Après le passage du front (zone $x \leq 3,5$ m sur la figure 6.6), la viscosité turbulente est quasi-constante et les moments d’ordre 2 augmentent donc linéairement. Dans ce cas, la dispersion induite par cette viscosité turbulente de sous-maille est très faible et conduit à une distribution gaussienne dont l’écart type n’est que de 0,05 mm après les 4 s de simulation. Dans le cas B, c’est-à-dire lorsque le ressaut est dominé par le courant, on observe trois vitesses différentes de dis-

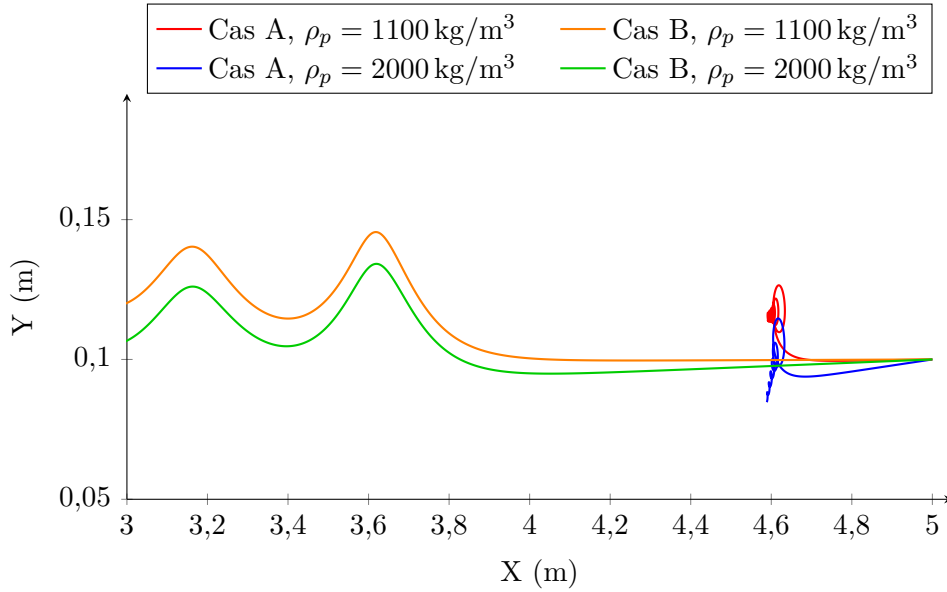


FIGURE 6.8 – Trajectoires des centres de masses des nuages de grains sédimentaires dans les deux cas A et B.

persion des grains sédimentaires. La première vitesse est très faible et est située loin avant l'arrivée du ressaut (zone $x \leq 5$ m sur la figure 6.7). La seconde vitesse est plus élevée que la première vitesse et est située entre 1,25 s avant l'arrivée du front du ressaut et le front lui-même (zone $3,8 \leq x \leq 5$ m sur la figure 6.7). Et la troisième vitesse, encore plus élevée que la seconde, correspond au moment où les grains sédimentaires atteignent le front du ressaut (zone $x \leq 3,8$ m sur la figure 6.7). Cependant, là encore la viscosité turbulente de sous-maille est très faible, bien que nettement supérieure au cas précédent, et conduit à une distribution gaussienne dont l'écart type n'est que de 0,2 mm après les 4 s de simulation. Ainsi, la contribution de la viscosité turbulente de sous-maille est très faible dans les deux cas malgré une valeur élevée du nombre de Schmidt turbulent. Elle ne jouera donc qu'un rôle mineur dans les résultats qui suivent.

6.2.1.2 Trajectoires des grains

Comme nous venons de le voir, la dispersion turbulente est très faible dans les cas étudiés. Les trajectoires obtenues sont donc extrêmement proches de la trajectoire du centre de masse, c'est-à-dire d'un grain pour lequel la dispersion turbulente est négligée. L'étude des trajectoires des grains sédimentaires est donc effectuée en supprimant la partie aléatoire due à la turbulence de sous-maille, ce qui représente les trajectoires moyennes de chaque type de grains. Dans les deux cas A et B, les grains sont injectés en $x = 4$ m aux hauteurs $y = 1$ cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm et 13 cm. Les masses volumiques de ces grains vont de 1000 kg/m^3 à 2500 kg/m^3 .

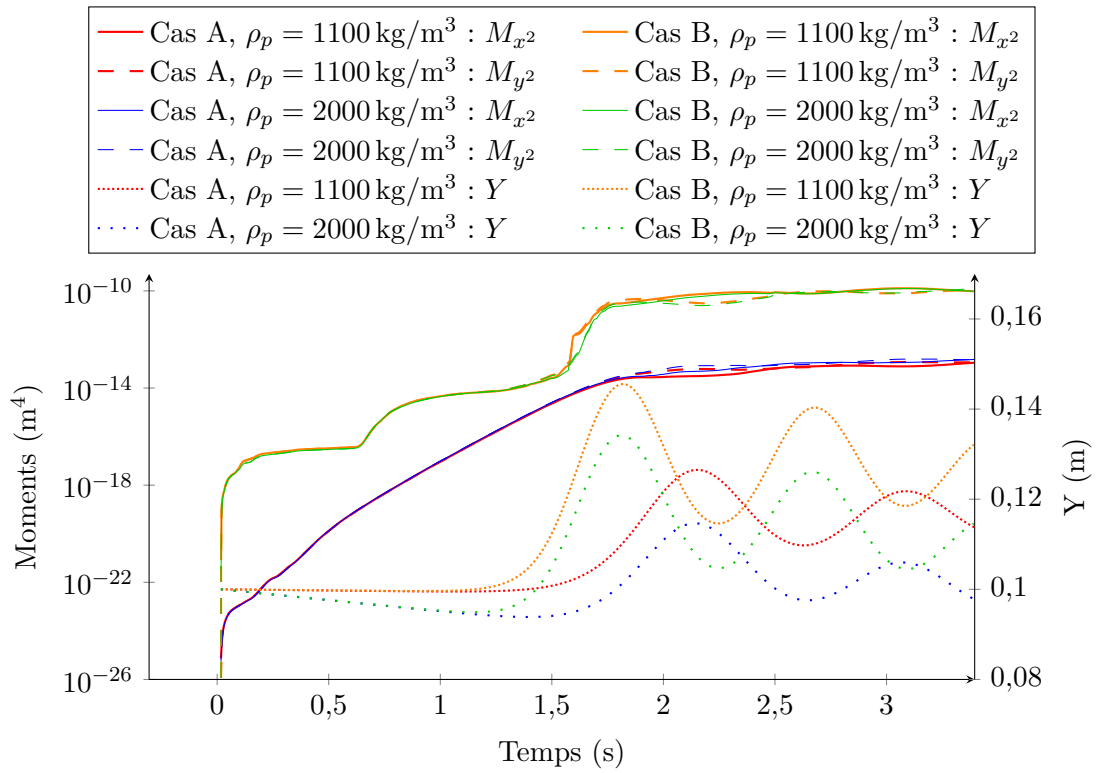
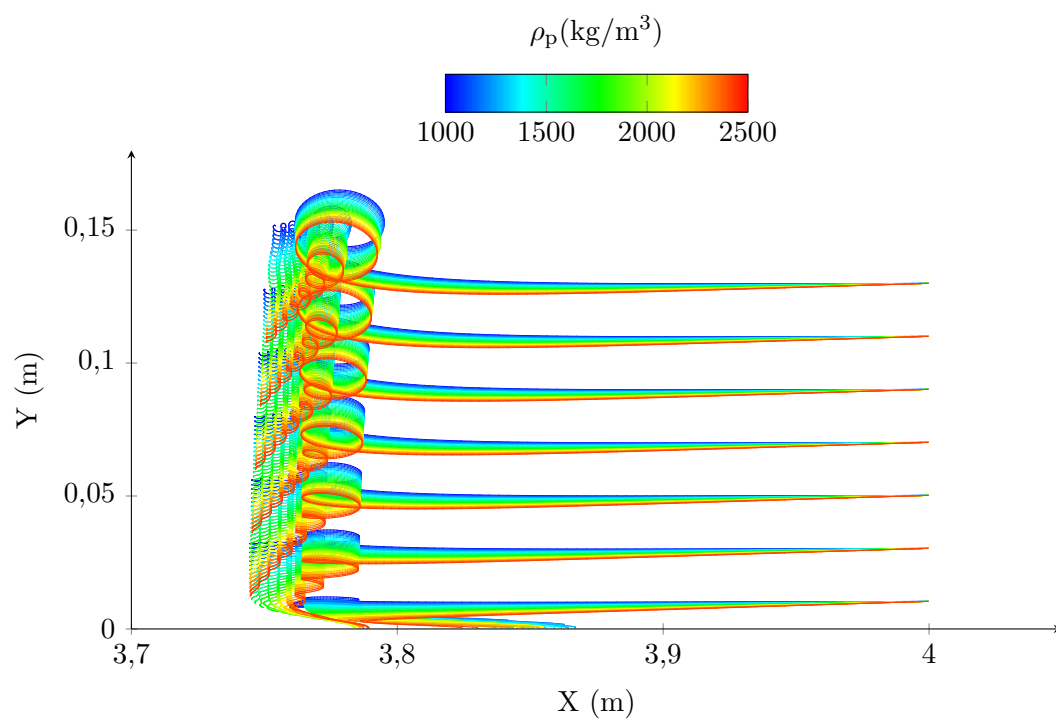
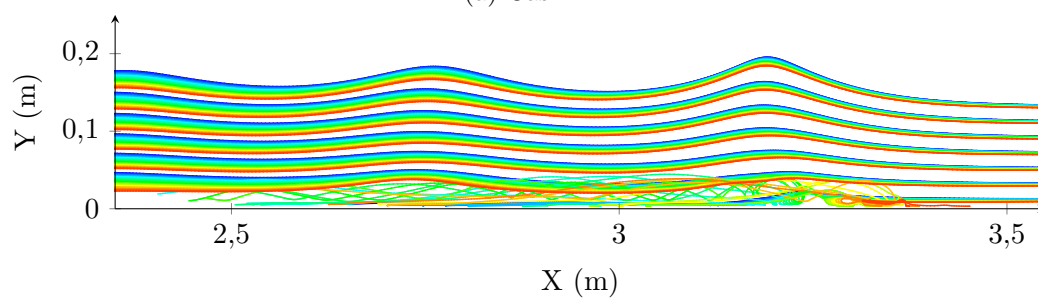


FIGURE 6.9 – Moments et élévation des nuages de grains sédimentaires au cours du temps.



(a) Cas A.



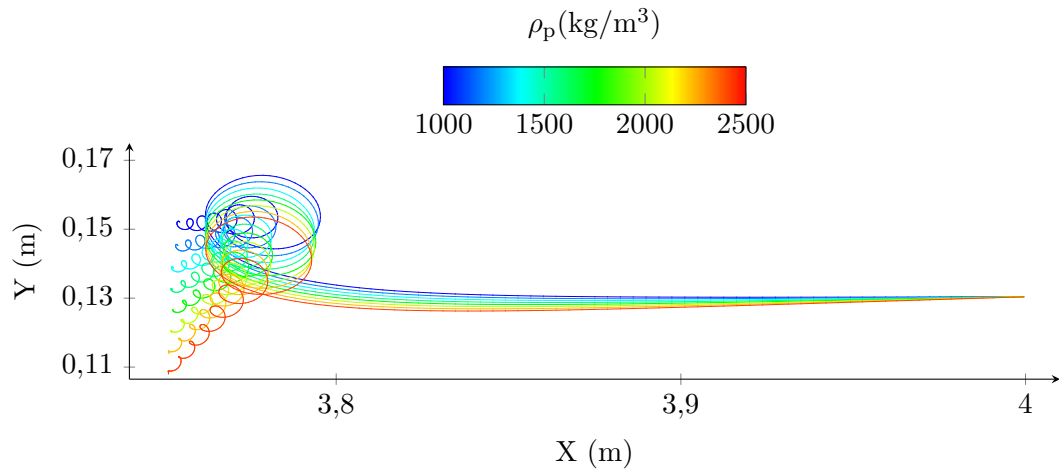
(b) Cas B.

FIGURE 6.10 – Trajectoires des grains sédimentaires lors du passage du ressaut pour différentes hauteurs d'injection et différentes masses volumiques.

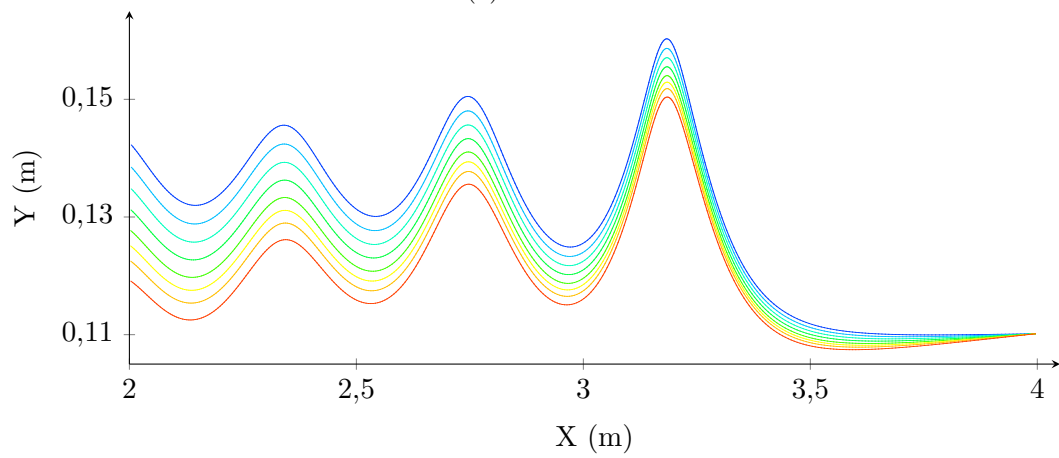
Les figures 6.10a et 6.10b représentent les trajectoires de ces grains dans les cas A et B pour différentes masses volumiques. Dans la partie supérieure de l'écoulement du cas A, c'est à dire au-dessus de la couche limite et de la zone d'inversion du courant, du fait de l'arrêt de l'écoulement après le front, les trajectoires forment des spirales dont le centre est en translation du fait d'une part du courant et d'autre part de la pesanteur. Dans ce cas, toutes les trajectoires des grains dont la hauteur d'injection est supérieure ou égale à $y = 5$ cm ont la même forme et ne se distinguent que par l'amplitude des spirales. Ce type de trajectoires seront appelées *trajectoires rubanaires enroulées*. En revanche, les grains injectés en $y = 1$ cm et $y = 3$ cm entrent en interaction avec la couche limite et la zone d'inversion du courant décrites précédemment et les spirales sont soit fortement déformées soit disparaissent totalement. On remarque par ailleurs que même dans le cas des grains de masse volumique égale à celle du fluide (1000 kg/m^3), un mouvement descendant apparaît après le passage du front, ce qui n'est pas le cas dans la zone supérieure. Il s'agit donc d'un mouvement descendant qui n'est pas dû à la gravité. Dans cet écoulement en particulier, la zone de retournement où la vitesse du fluide est dirigée de l'aval vers l'amont (figure 6.5a) reste toujours présente entre 0 cm et 0,5 cm du fond après le passage du front, bien que la norme de la vitesse soit faible : environ $0,035 \text{ m/s}$. Cette fine couche de renversement induit un mouvement d'aspiration du fluide entre 0,5 cm et 2 cm du fond, d'où le mouvement descendant des grains dans cette zone.

Au contraire, dans le cas B, l'écoulement conserve une vitesse en direction de l'aval et les trajectoires ne font qu'onduler tout en continuant vers l'aval dans cette zone supérieure. Dans ce cas, toutes les trajectoires des grains ont la même forme dès lors que la hauteur d'injection est supérieure ou égale à $y = 3$ cm. Ce type de trajectoires seront appelées *trajectoires rubanaires ondulantes*. Pour les grains injectés en $y = 1$ cm, les trajectoires sont beaucoup plus complexes du fait des fortes interactions avec les zones de recirculation. On observe notamment que les grains dont la masse volumique se situe entre 1500 et 2200 kg/m^3 peuvent avoir des trajectoires quasi-balistiques qui remontent jusqu'à une hauteur de 3 à 4 cm. Ces trajectoires sont très proches de celles observées dans le cas de la saltation et sont dues à l'entraînement vertical des grains par les zones de recirculation successives qui induisent une forte accélération verticale puis, lorsque cette zone de recirculation avance en même temps que le ressaut, le grain conserve une composante verticale importante du fait de son inertie, d'où les trajectoires semi-balistiques observées. Les grains trop légers, c'est-à-dire ceux dont la masse volumique est inférieure à 1500 kg/m^3 , n'ont pas une inertie suffisante et suivent à nouveau l'écoulement dès leur sortie de la zone de recirculation. Au contraire, les grains trop lourds dont la masse volumique est supérieure à 2200 kg/m^3 ne sont pas suffisamment accélérés et continuent leur sédimentation même dans ces zones.

Les formes de trajectoires observées dans la partie supérieure ($h \geq 5$ cm) sont très proches de celles rencontrées dans le cadre des interactions onde-courant (Chen *et al.*, 2010, 2012a,b; Hsu, 2013; Chen et Chen, 2014). Dans ces travaux, le courant

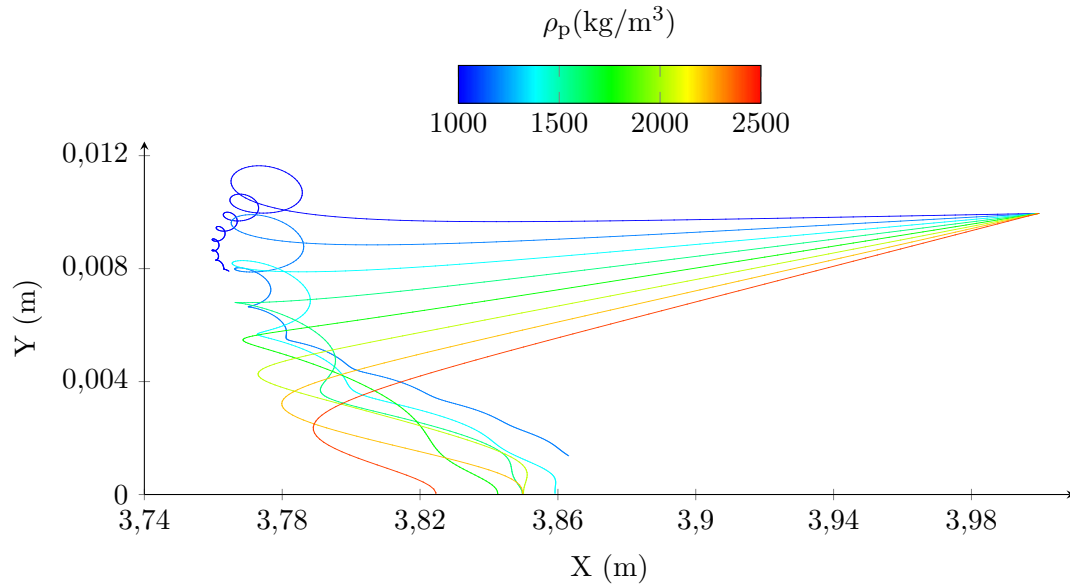


(a) Cas A.

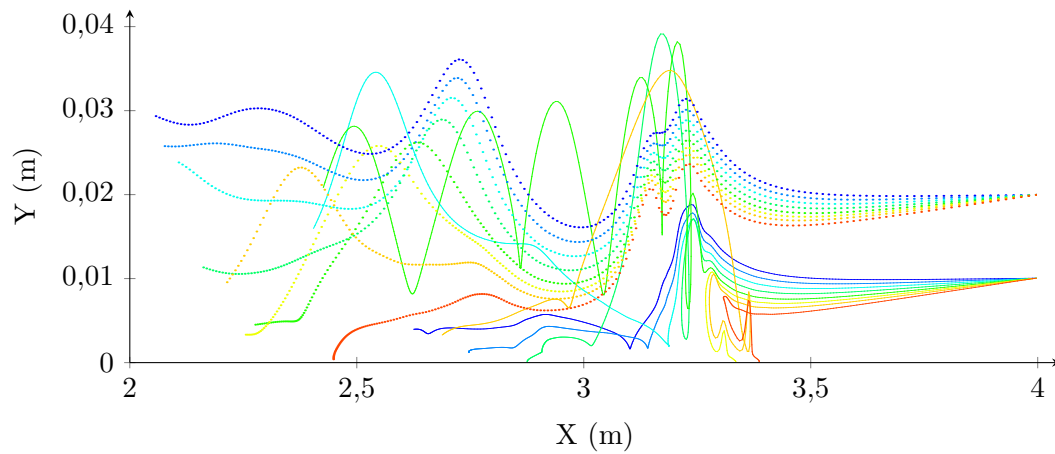


(b) Cas B.

FIGURE 6.11 – Trajectoires des grains sédimentaires dans la partie supérieure de l'écoulement ($h \geq 5 \text{ cm}$) lors du passage du ressaut pour différentes masses volumiques.



(a) Cas A.



(b) Cas B.

FIGURE 6.12 – Trajectoires des grains sédimentaires dans la partie inférieure de l'écoulement ($h \leq 5 \text{ cm}$) lors du passage du ressaut pour différentes masses volumiques.

est supposé constant, l'onde est établie et les auteurs se limitent au suivi de particules fluides, ce qui, dans notre étude, est équivalent aux grains de masse volumique $\rho_p = \rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$. Les équations des trajectoires des particules fluides résultant de ces travaux sont complexes et sont données en annexe D. Pour caractériser ces trajectoires, on appelle \vec{U} la vitesse de l'écoulement, \vec{C} la vitesse de propagation de l'onde et \vec{V} la vitesse maximale d'un grain induite par la même onde se propageant dans un fluide au repos. D'après celles-ci, cinq régimes principaux peuvent être différenciés :

- lorsque l'onde se propage dans le même sens que l'écoulement et que $\|\vec{V}\| > \|\vec{U}\|$, les trajectoires forment des *trochoïdes allongées*¹ orientées vers le bas (figure 6.13a).
- lorsque l'onde se propage dans le même sens que l'écoulement et que $\|\vec{V}\| = \|\vec{U}\|$, les trajectoires forment des *cycloïdes orientées vers le bas* (figure 6.13b).
- lorsque l'onde se propage dans le sens opposé à l'écoulement et que $\|\vec{V}\| > \|\vec{U}\|$, les trajectoires forment des *trochoïdes allongées orientées vers le haut* (figure 6.13c).
- lorsque l'onde se propage dans le sens opposé à l'écoulement et que $\|\vec{V}\| = \|\vec{U}\|$, les trajectoires forment des *cycloïdes orientées vers le haut* (figure 6.13d).
- lorsque l'onde se propage à une vitesse nettement inférieure à l'écoulement, quel que soit son sens, l'effet de l'onde est faible et l'on a $\|\vec{V}\| \ll \|\vec{U}\|$. Les trajectoires forment alors des *ondulations* (figure 6.13e).

Les théories développées dans ce cadre ne permettent donc pas de reproduire toutes les caractéristiques des trajectoires rencontrées dans le cadre d'un ressaut hydraulique. Cependant, des modifications intuitives de ces théories permettent de s'approcher très nettement des trajectoires observées. Les caractéristiques de ces trajectoires sont les suivantes :

- une trajectoire horizontale à la vitesse V_1 sans ondulation avant le passage du ressaut.
- une surélévation du niveau moyen au passage du ressaut, passant de h_1 à h_2 .
- un ralentissement du courant au passage du ressaut, passant de U_1 à U_2 .
- des oscillations autour d'un niveau moyen au passage de chaque éteule qui s'atténuent progressivement.
- une dérive verticale due à la gravité.

Ces différents éléments sont schématisés sur la figure 6.14. On remarque que dans les deux cas, tous les éléments sont identiques sauf l'aspect interaction onde-courant. Or, les équations proposées par [Chen et al. \(2012a\)](#) permettent de représenter l'interaction onde-courant pour les deux cas, une seule équation est donc nécessaire pour décrire les trajectoires des grains dans la partie supérieure des ressauts ondulants, quel que soit leur mode de génération. Tous ces éléments peuvent être mis en

1. Une trochoïde est une courbe d'équation
$$\begin{cases} x(t) = at - b \sin(t) \\ y(t) = a - b \cos(t) \end{cases} .$$
 Elle est dite *allongée* lorsque $a < b$ et *raccourcie* lorsque $a > b$.

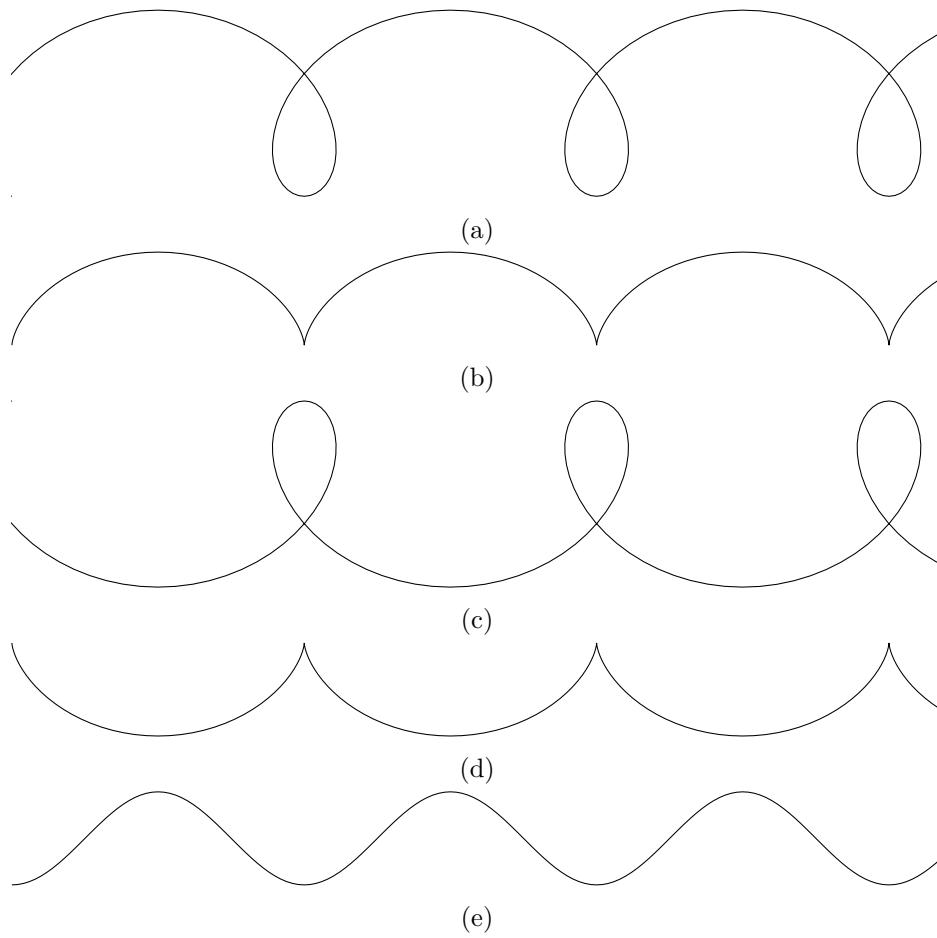


FIGURE 6.13 – Différents types de trajectoires de particules fluides dans un écoulement de type interaction onde-courant (Chen *et al.*, 2010, 2012a,b; Chen et Chen, 2014; Hsu, 2013).

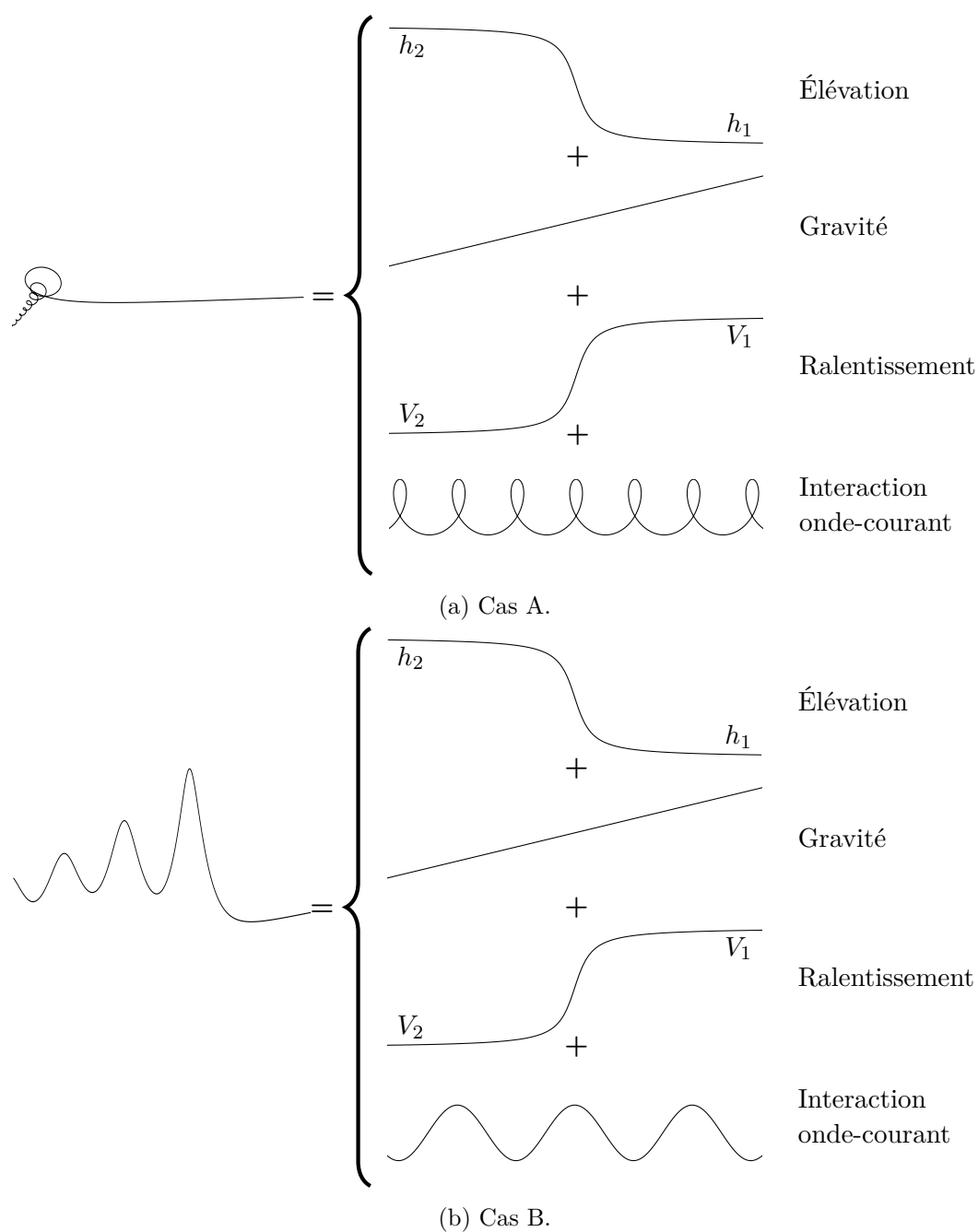


FIGURE 6.14 – Caractéristiques des trajectoires rencontrées dans les deux cas étudiés.

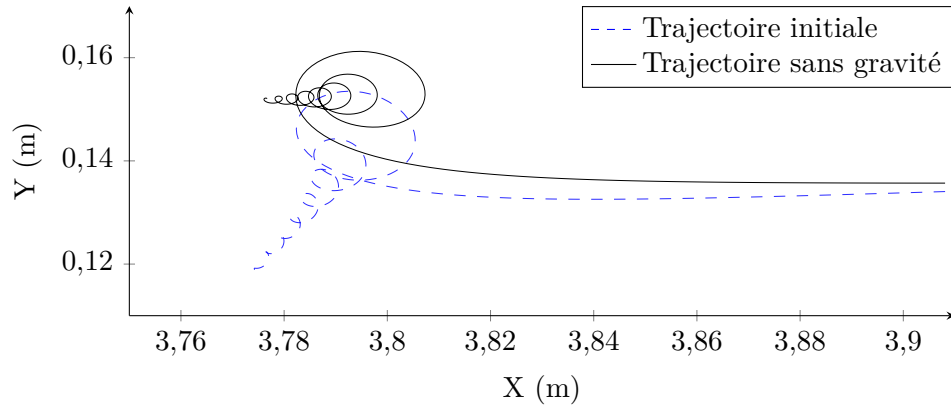


FIGURE 6.15 – Comparaison de la trajectoire complète à la trajectoire dont la contribution de la gravité a été retirée (cas A).

équations individuellement. La transition qui s'opère au niveau du front est représentée par une tangente hyperbolique, ce qui permet de passer de l'état 1, avant le ressaut, à l'état 2, après le ressaut, de manière continue. Nous proposons ici de séparer les différentes contributions afin de pouvoir quantifier chacune d'elles, d'abord dans le cas A puis dans le cas B. Le modèle présenté n'a pas vocation à reproduire précisément les trajectoires des grains sédimentaires mais permet de mieux comprendre les différentes composantes du phénomène. Les valeurs des paramètres qui seront utilisés lors de cette décomposition sont données dans le tableau 6.1.

La première caractéristique simple à isoler est la composante due à la gravité. En considérant que la vitesse de sédimentation est constante, cette composante est de la forme :

$$y(t) = -w_s (t - t_0) \quad (6.7)$$

où t_0 est l'instant initial de la trajectoire et $w_s = 0,007$ m/s pour le grain de masse volumique $\rho_p = 2500$ kg/m³ avec un coefficient de traînée obéissant à la formule de [Clift et al. \(1978\)](#). En soustrayant cette contribution à la trajectoire complète, on obtient une nouvelle trajectoire qui n'est plus affectée par la gravité, même pour un grain de masse volumique différente de celle du fluide (figure 6.15).

La seconde caractéristique concerne la surélévation ainsi que le ralentissement du courant au passage du ressaut. Elles peuvent être rassemblées dans une même équation dans laquelle la hauteur passe de h_1 à h_2 et la vitesse de l'écoulement passe de U_1 à U_2 . Les grains étudiés étant petits, leurs vitesses restent très proches de celle de l'écoulement, notamment sur la composante horizontale, le ralentissement de l'écoulement se traduit donc directement par un ralentissement des grains. Cette fois-ci, la contribution issue de la surélévation aura une forme en tangente hyperbolique et celle issue du ralentissement obéira à l'intégrale d'une tangente

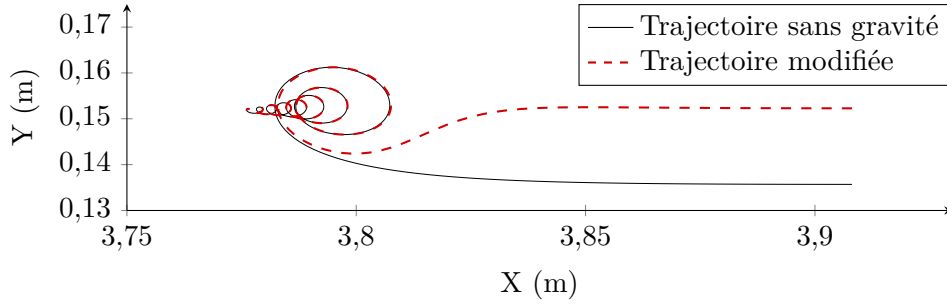


FIGURE 6.16 – Comparaison de la trajectoire sans gravité à la trajectoire dont les contributions de la gravité, de la surélévation et du ralentissement ont été retirées (cas A).

hyperbolique :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{2\beta_1} [(U_1 - U_2) \log(\cosh(-\beta_1 t_B)) - \log(\cosh(\beta_1(t - t_B)))] + \beta_1(U_1 + U_2)t \\ y(t) &= \frac{h_2 - h_1}{2} \tanh(\beta_2(t - t_B)) \end{cases} \quad (6.8)$$

où t_B est l'instant où le grain traverse le front du ressaut, β_1 est le paramètre contrôlant la rapidité du ralentissement entre les deux états avant et après le front et β_2 est le paramètre contrôlant la vitesse de surélévation entre les deux états. La figure 6.16 présente la nouvelle trajectoire lorsque l'on soustrait cette contribution comparée à la précédente dont l'effet de la gravité a déjà été déduit. Cette nouvelle trajectoire est très proche des trajectoires observées par [Russell](#) dans le cas qu'il appelle *onde solitaire négative du premier ordre* (figures 7 à 10 de [Russell \(1845\)](#)).

Enfin, les oscillations représentées par une trajectoire rencontrée en interaction onde-courant ainsi que l'atténuation progressive peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} x(t) = x_{Chen}(t) \exp(-\beta_3(t)) \\ y(t) = y_{Chen}(t) \exp(-\beta_3(t)) \end{cases} \quad (6.9)$$

où β_3 est le paramètre d'atténuation et $(x_{Chen}; y_{Chen})$ sont les solutions proposées par [Chen et al. \(2012a\)](#) et données en annexe D. Les paramètres utilisés dans ces équations sont ceux de l'écoulement après le passage du front du ressaut. La trajectoire déterminée à partir de ces équations est comparée à la trajectoire du grain après le passage du front du ressaut en figure 6.17. Ce modèle simple permet de reproduire la forme de la trajectoire des grains lorsqu'ils passent sous les éteules mais est d'autant moins valide que l'on se trouve proche du front. Ceci s'explique par les effets associés au front qui ne sont pas représentés dans ce modèle et aussi parce que le modèle n'est supposé représenter que des trajectoires de particules fluides et non de grains sédimentaires dont la masse volumique est différente de celle du fluide.

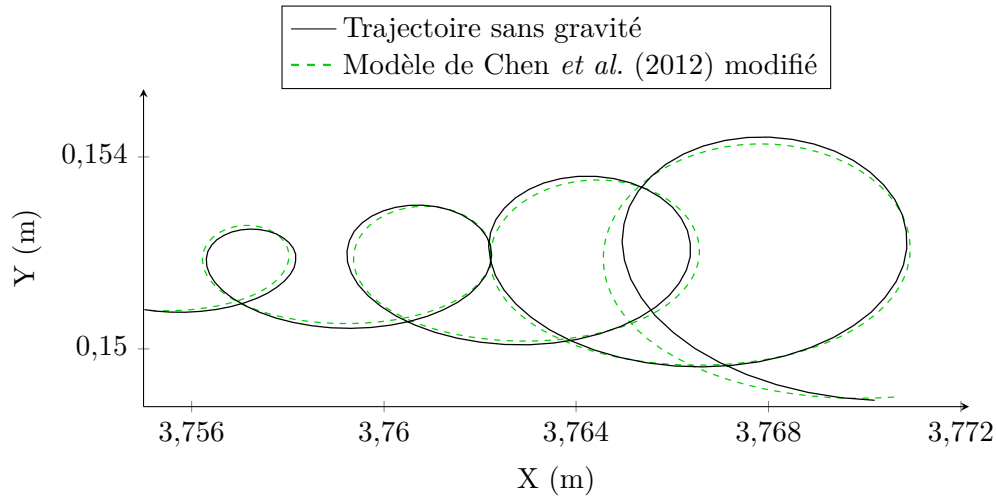


FIGURE 6.17 – Comparaison de la trajectoire sans gravité dans la partie suivant le passage du front du ressaut à la trajectoire issue du modèle d’interaction onde-courant avec atténuation (cas A).

Paramètre	Cas A	Cas B
t_B	3 s	5,5 s
w_s	$7,1 \times 10^{-3}$ m/s	$7,1 \times 10^{-3}$ m/s
β_1	1.1	1.5
β_2	9.37	4.87
β_3	0,605	0,63

TABLE 6.1 – Paramètres utilisés pour la décomposition des trajectoires.

Ces équations donnent une bonne approximation de la trajectoire après le passage du ressaut une fois que la contribution de la gravité a été retirée. Elles ne peuvent cependant pas donner de solutions précises puisque l’on a négligé implicitement l’inertie des grains ainsi que plusieurs termes de la force hydrodynamique tels que la traînée, la masse ajoutée et la force d’histoire. Malgré tout, cette décomposition permet bien de distinguer les différentes contributions.

Les mêmes opérations appliquées au cas B permettent aussi de décomposer la trajectoire d’un grain. Les différentes étapes sont présentées sur les figures 6.18, 6.19 et 6.20 dont les paramètres sont donnés dans le tableau 6.1. Dans ce cas aussi, le modèle proposé permet de séparer les différentes composantes de manière satisfaisante. Une étude plus approfondie serait néanmoins requise car ici le nombre d’éteules traversées par les grains est trop faible (seulement 3) pour tirer une conclusion généralisable.

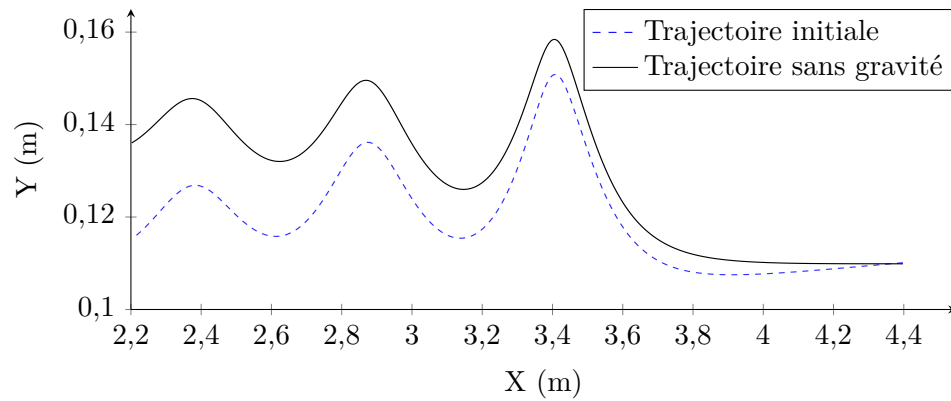


FIGURE 6.18 – Comparaison de la trajectoire complète à la trajectoire dont la contribution de la gravité a été retirée (cas B).

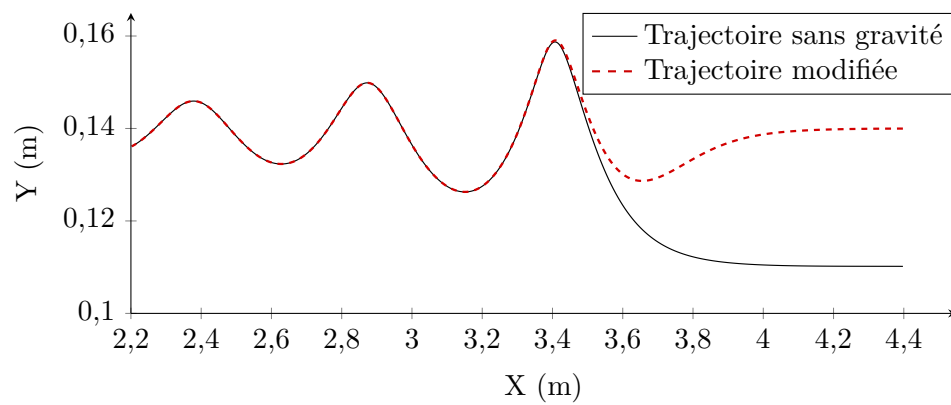


FIGURE 6.19 – Comparaison de la trajectoire sans gravité à la trajectoire dont les contributions de la gravité, de la surélévation et du ralentissement ont été retirées (cas B).

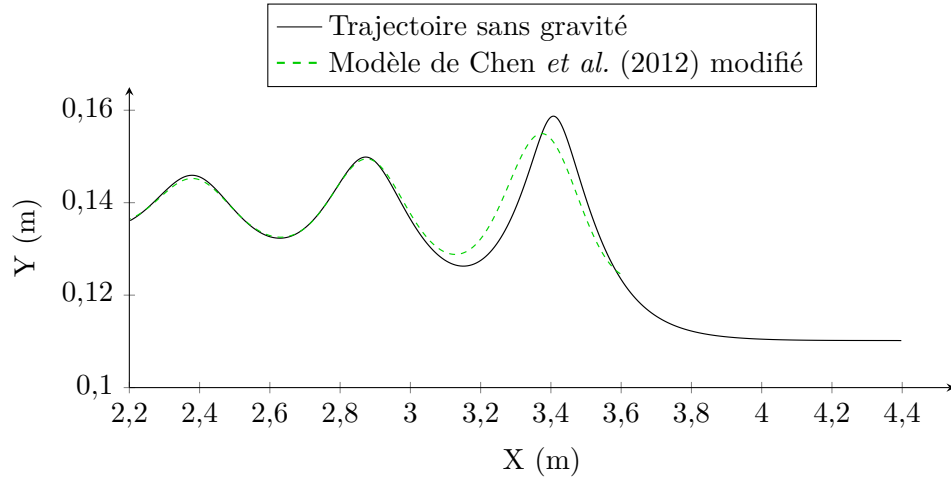


FIGURE 6.20 – Comparaison de la trajectoire sans gravité dans la partie suivant le passage du front du ressaut à la trajectoire issue du modèle d’interaction onde-courant avec atténuation (cas B).

6.2.2 Méthode particulaire

La seconde partie de cette étude du transport sédimentaire induit par les mascarets consiste à utiliser la méthode particulaire, ce qui permet de modéliser l’évolution de la concentration en grains au cours du temps. L’objectif est d’évaluer l’impact du passage d’un mascaret sur les sédiments déjà présents dans le fluide en fonction de leur hauteur initiale. Dans ce but, des nappes de 1 cm d’épaisseur sont injectées à : 0 cm, 2 cm puis 10 cm du fond. Les valeurs des concentrations sont toujours adimensionnées par la valeur initiale maximum, comme précisé en chapitre 3. L’évolution de ces nappes est calculée en utilisant la méthode présentée dans le chapitre 3, avec un schéma temporel de Runge-Kutta 4 et en corrigeant l’éventuelle présence de divergence par la méthode de renormalisation. Afin de s’approcher des conditions observées dans la baie du Mont Saint-Michel dans le cadre du projet [ANR Mascaret](#), la vitesse de sédimentation est fixée à 0,15 cm/s ([Furgerot, 2014](#)). Le choix de nappes de 1 cm d’épaisseur est basé sur l’épaisseur de la couche limite dans le cas B. En effet, la figure 6.21 représente l’évolution de la vitesse horizontale du fluide en fonction de la distance au fond pour les cas A et B. Dans le premier cas, l’épaisseur de la couche limite est égale à $5,54 \times 10^{-3}$ m et à $8,96 \times 10^{-3}$ m dans le second cas. Ainsi, une nappe de 1 cm d’épaisseur permet d’englober l’ensemble de la couche limite dans les deux cas pour la nappe en contact avec le fond tout en permettant la comparaison des deux cas l’un par rapport à l’autre, puisque les états initiaux sont identiques. Par ailleurs, nous préférons baser le choix de cette épaisseur sur le cas B car, comme nous l’avons vu en 1.1.2, celui-ci est plus proche d’un mascaret naturel. Enfin, les nappes sont injectées lorsque le front du ressaut se situe en $x = 2,5$ m et sont injectées sur une longueur de 4 m, de $x = 2$ m jus-

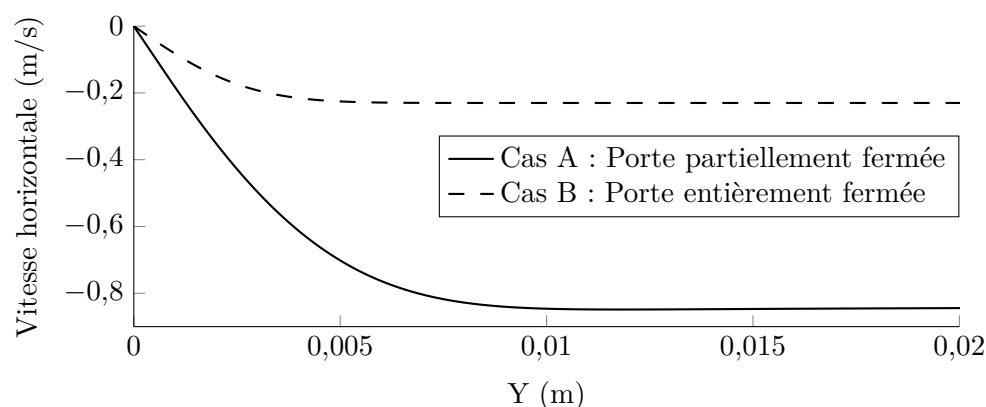


FIGURE 6.21 – Évolution des vitesses horizontales du fluide proche du fond pour les deux cas étudiés : lorsque la porte est entièrement fermée (cas A) et lorsqu'elle ne l'est que partiellement (cas B).

qu'à $x = 6$ m. Cette injection permet d'une part de laisser le temps au front de se développer à partir de la porte et d'autre part d'observer l'effet du front sur des sédiments n'ayant pas été perturbés ce qui permet de s'assurer que les évolutions des distributions de sédiments observées sont majoritairement dues au ressaut lui-même. Les états initiaux des différentes nappes sont représentés sur les figures 6.22a et 6.22b.

6.2.2.1 Observations générales

Une première comparaison qualitative des motifs observés dans les cas A et B est présentée sur les figures 6.23 et 6.24 qui représentent l'état des trois nappes une fois que le front se trouve à $x = 3,7$ m. Dans le cas A, c'est à dire lorsque l'écoulement est entièrement bloqué par la porte, les nappes sédimentaires sont très peu perturbées. Ceci s'explique de manière simple puisque le fluide est presque immédiatement stoppé après le passage du front, les sédiments ne peuvent donc être que peu perturbés. Au contraire, dans le cas B, lorsque l'écoulement n'est que ralenti par le ressaut hydraulique, de larges motifs apparaissent dans les couches proches du fond du canal. Cette fois-ci, du fait que l'écoulement ne soit pas stoppé et à cause de la forte perturbation causée par le passage du front sur l'écoulement, la couche limite se déstabilise et des structures tourbillonnaires se forment à partir de celle-ci. Ces structures impactent alors très nettement les sédiments présents dans l'écoulement. Ces structures ont été observées par Furgerot (2014) lors d'expériences en canal (figure 6.25) mais n'ont pas encore fait l'objet d'une étude approfondie.

Dans tous les cas, une surélévation de l'ensemble des sédiments est constatée lors du passage du front, légèrement en aval de celui-ci. Le maximum de cette élévation suit approximativement une droite dont le coefficient directeur est égal à -4 dans le cas A et $-1,5$ dans le cas B. Cette première observation semble indiquer que dans

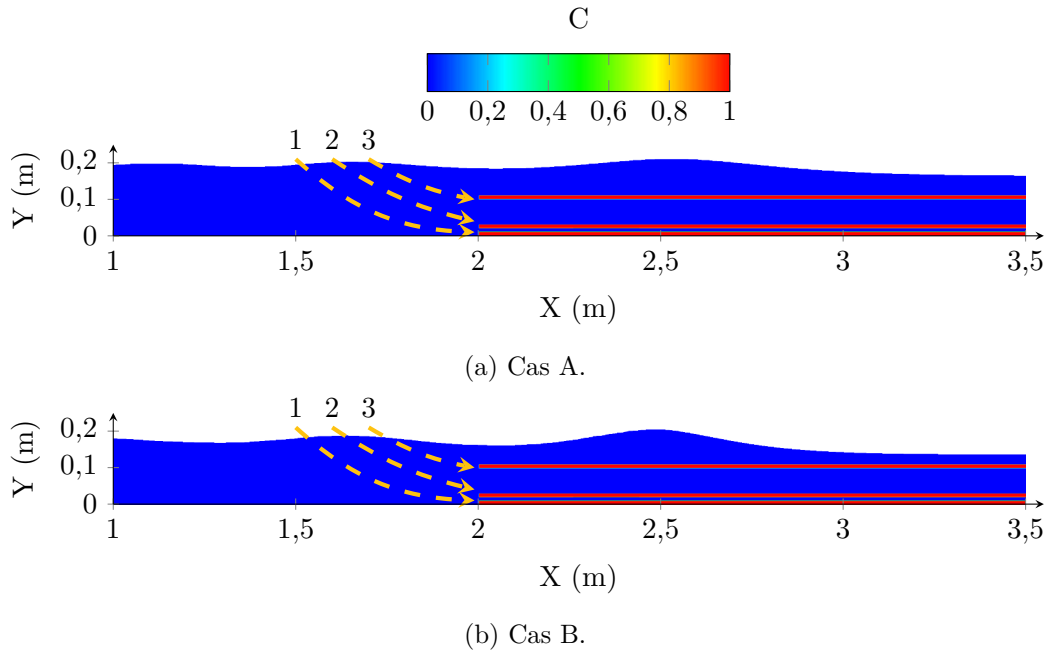


FIGURE 6.22 – Positions d'injection des nappes : nappe 1 en $0 \leq y \leq 0,01$ m, nappe 2 en $0,02 \leq y \leq 0,03$ m et nappe 3 en $0,1 \leq y \leq 0,11$ m avec $2 \leq x \leq 6$ m.

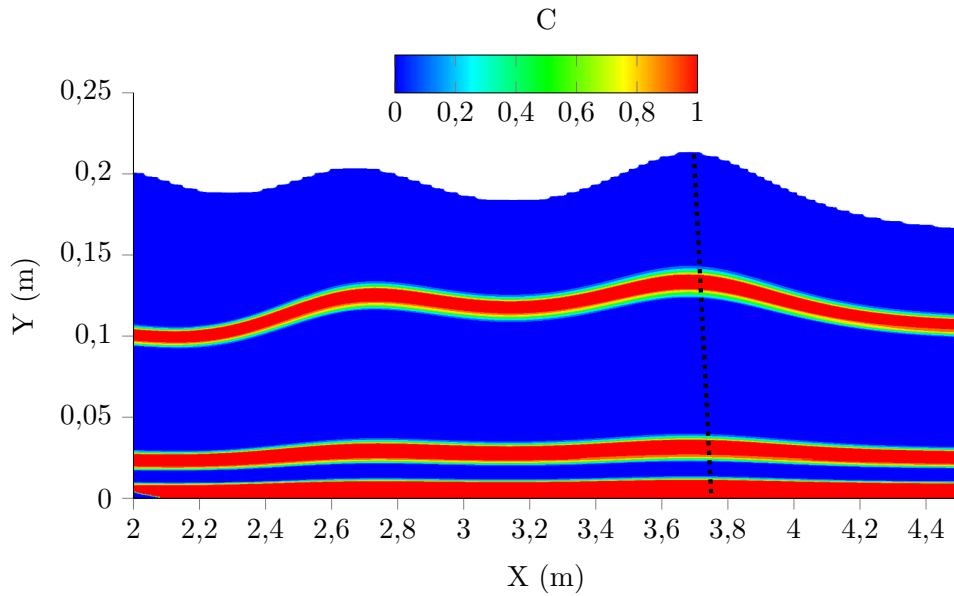


FIGURE 6.23 – Cas A : vue globale des différentes nappes injectées lorsque le front est en $x = 3,7$ m. La position du soulèvement initial maximum des sédiments est mis en évidence par la ligne pointillée dont le coefficient directeur est égal à -4 .

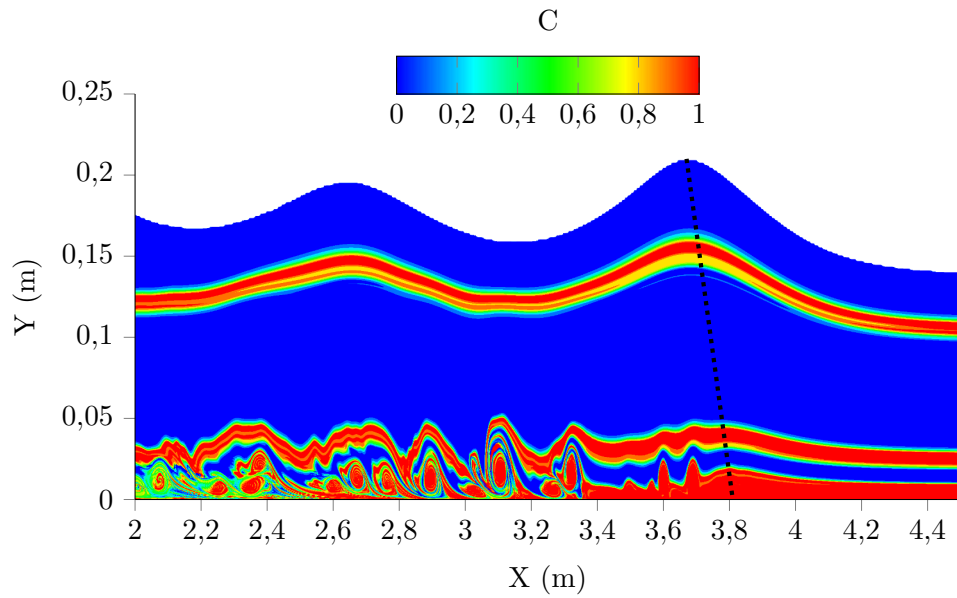


FIGURE 6.24 – Cas B : vue globale des différentes nappes injectées lorsque le front est en $x = 3,7\text{m}$. La position du soulèvement initial maximum des sédiments est mis en évidence par la ligne pointillée dont le coefficient directeur est égal à $-1,5$.

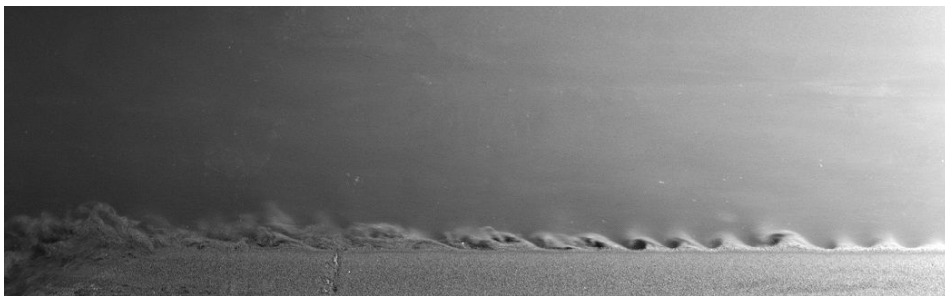


FIGURE 6.25 – Observations expérimentales réalisée dans le cadre de l'ANR par l'équipe M2C : apparition de structures sédimentaires proche du fond.

le cas B, l'influence du ressaut se fait sentir au fond sensiblement avant son passage, au contraire du cas A.

La seconde observation concerne l'amplitude de ce soulèvement qui est nettement supérieure dans le cas B. Ceci tient du fait que, pour obtenir des nombres de Froude proches dans les deux cas étudiés, des conditions initiales différentes sont nécessaires concernant la hauteur h_1 et la vitesse V_1 . Ainsi, l'amplitude du ressaut et des vagues secondaires est plus petite dans le cas A que dans le cas B, ce qui induit logiquement un effet vertical moindre du ressaut dans ce cas. De plus, une fois soulevés les sédiments ont tendance à rester à une hauteur supérieure à leur hauteur initiale dans tous les cas, car leur vitesse de sédimentation est faible. Dans le cas de la nappe supérieure, l'évolution des sédiments après le passage du front consiste essentiellement à osciller, du fait des éteules, autour d'une hauteur moyenne.

Enfin, du fait de l'immobilisation du fluide dans le cas A dès le passage du front du ressaut, les sédiments sont très peu déplacés après que celui-ci les ait perturbés. Au contraire, dans le cas B, le fluide continue de s'écouler dans le cas B, malgré un ralentissement. Cet aspect est bien sûr très important en ce qui concerne le transport sédimentaire puisqu'il déterminera où les sédiments perturbés par le ressaut pourront ensuite sédimenter.

6.2.2.2 Étude de l'évolution spatio-temporelle des nappes de sédiments

Une étude plus fine de l'évolution spatio-temporelle des nappes de sédiments est réalisée. Pour cela, la concentration en grains est intégrée par bandes soit verticales soit horizontales afin de ramener l'information bidimensionnelle à une information unidimensionnelle pour un instant donné. Ainsi, l'étude de l'évolution temporelle de cette nouvelle grandeur permettra d'observer l'évolution globale d'une nappe de sédiments. Dans la suite, nous appellerons la valeur de l'intégration de la concentration selon une bande horizontale (\overline{C}_h) ou verticale (\overline{C}_v), à un instant donné :

$$\overline{C}_h(y,t) = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} C(x,y,t) dx \quad (6.10)$$

$$\overline{C}_v(x,t) = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} C(x,y,t) dy \quad (6.11)$$

où M est la masse totale de grains sédimentaires contenus dans le domaine.

Les figures 6.26, 6.27 et 6.28 montrent les différentes situations rencontrées dans les cas A et B ainsi que leurs effets sur les valeurs de \overline{C}_h et \overline{C}_v . Ces schémas nous permettront d'interpréter plus facilement l'évolution de \overline{C}_h et \overline{C}_v . Ainsi, si les valeurs de \overline{C}_h ne permet d'obtenir des informations que concernant la répartition verticale globale des sédiments, \overline{C}_v permet d'obtenir des informations plus détaillées. En effet, \overline{C}_v peut être influencée par l'orientation de la nappe et son épaisseur. Une augmentation de \overline{C}_v peut donc traduire un épaississement de la nappe du fait du ralentissement de l'écoulement, comme c'est le cas au niveau du front et au sommet des éteules.

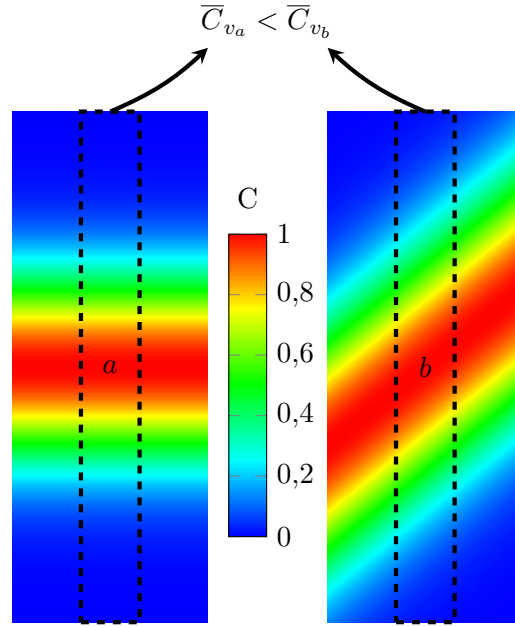
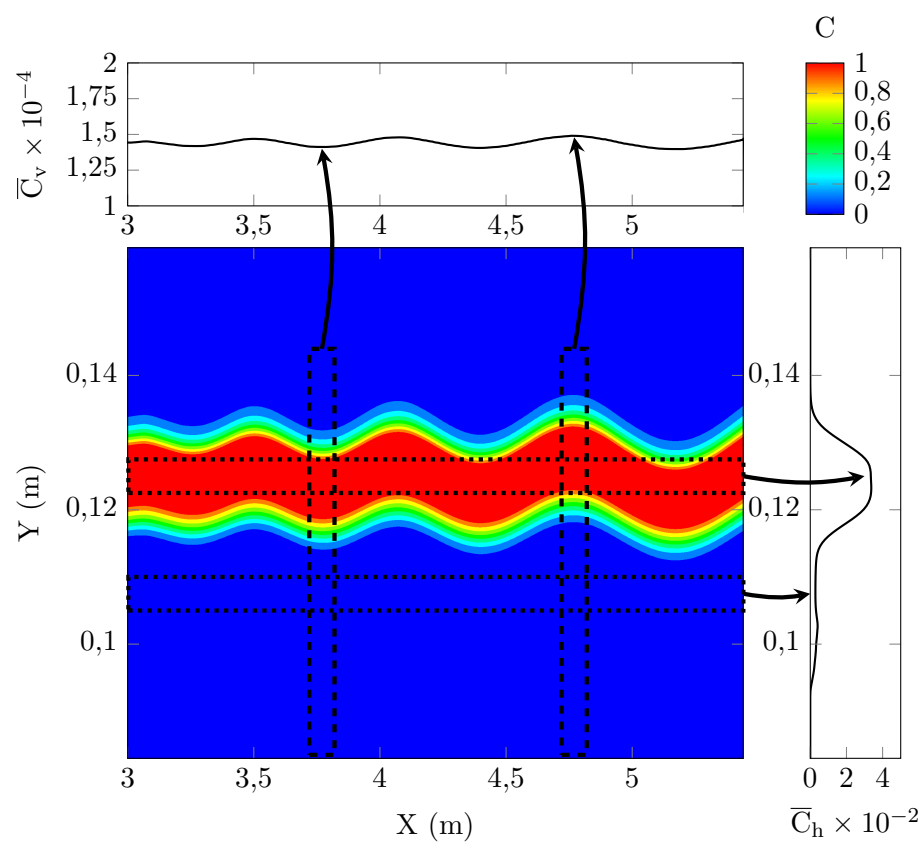


FIGURE 6.26 – Schéma de l'effet de l'orientation d'une nappe sur les valeurs de \overline{C}_v .

Les figures 6.30, 6.32, 6.34, 6.36, 6.38 et 6.40 présentent les résultats de \overline{C}_v pour les nappes aux trois hauteurs différentes pour les deux cas A et B. De la même manière, les figures 6.31, 6.33, 6.35, 6.37, 6.39 et 6.41 présentent le résultat de \overline{C}_h pour les deux mêmes cas. Sur celles-ci, les tiretés ne représentent que la séparation approximative entre la zone A dans laquelle sont concentrés les sédiments et les zones B et C pauvres en sédiments.

Cette représentation permet de faire ressortir de nombreuses caractéristiques du transport sédimentaire. Tout d'abord, les différentes figures sont découpées en zones bien distinctes. Celles représentant \overline{C}_v le sont en 6 zones et \overline{C}_h en 3 zones. Pour \overline{C}_v , les différentes zones sont définies de la manière suivante :

- la zone A est définie comme la zone contenant des sédiments qui n'ont pas été perturbés par le ressaut, c'est à dire en aval du front.
- la zone B est la zone en aval de la zone A qui ne contient pas ou peu de sédiments. Ainsi, la ligne - - - (type 1) séparant les zones A et B permet de connaître la vitesse horizontale d'advection des sédiments avant l'arrivée du ressaut.
- la zone C est la zone contenant les sédiments perturbés par le front du ressaut ainsi que par les éteules. La ligne - - - - - (type 2) séparant la zone C de la zone A indique la vitesse de propagation du ressaut dans l'écoulement.
- la zone D est celle qui contient des sédiments qui ont été injectés en amont du front du ressaut et qui ne sont donc perturbés que par les éteules et les perturbations provoquées en amont du front par le passage de celui-ci. Il faut noter que cette zone ne donne pas un résultat physique puis qu'il n'est pas

FIGURE 6.27 – Effet de l'ondulation d'une nappe sur les valeurs de \overline{C}_h et de \overline{C}_v .

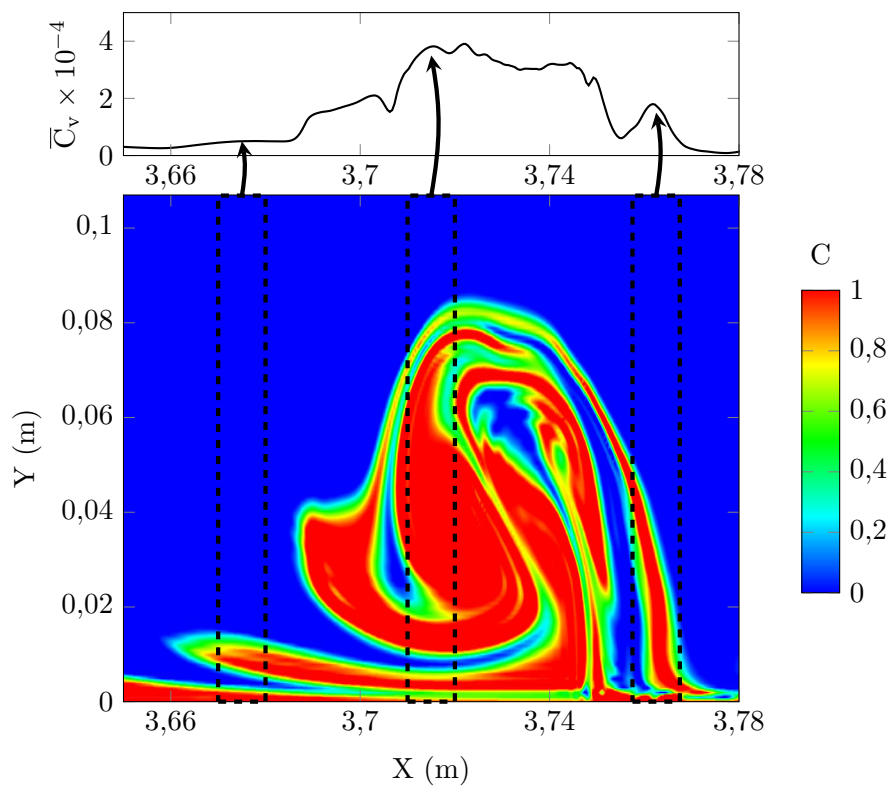


FIGURE 6.28 – Effet d’une structure tourbillonnaire sur les valeurs de \overline{C}_v .

possible d'injecter des sédiments qui ne soient perturbés que par l'écoulement en aval du front. Cependant, cette zone fournit des informations intéressantes puisqu'elle permet de "soustraire" les effets du front et donc d'observer les effets des éteules et du courant uniquement. Les lignes (type 3) délimitant cette zone dépendent de la vitesse d'advection des sédiments à la suite du passage du front du ressaut. Dans le cas A, ces lignes sont donc très proches de la verticale puisque l'écoulement s'arrête brusquement en amont du front.

- la zone E est la zone en amont du front mais d'où les sédiments ont été évacués par advection avant l'arrivée de celui-ci. De même que les lignes délimitant la zone D, la ligne (type 3) entre la zone C et E est conditionnée par la vitesse d'advection des sédiments après le passage du front.
- la zone F est la zone en amont de la zone D qu'aucun sédiment ne peut atteindre et est délimitée par une ligne du même type que les zones D et E : (type 3).

Ces différentes zones sont représentées sur la figure 6.29 pour deux instants différents pour les deux cas A et B. Pour \bar{C}_h , la zone A' est la zone où les sédiments se concentrent, les zones B' et C' sont les zones situées respectivement au-dessus et au-dessous de la zone A' contenant peu de sédiments.

Les différentes vitesses associées aux droites tracées sont rassemblées dans le tableau 6.2. On remarque qu'il n'y a aucune variation de vitesse en fonction de la hauteur dans le cas A, mis à part pour une faible part des sédiments ralentis par la couche limite. Au contraire, le cas B présente une augmentation de la vitesse d'advection des sédiments après le passage du front en fonction de leur hauteur initiale. Les sédiments les plus élevés pourront donc parcourir une distance sensiblement plus grande avant de se déposer au fond. Ceci s'explique par un cisaillement global de l'écoulement dû au blocage de l'écoulement par la porte qui n'a lieu que dans la partie supérieure. La partie inférieure pouvant s'écouler librement, un cisaillement global s'établit naturellement et influe directement, bien que faiblement, sur le transport sédimentaire. Par contre, dans ce cas aussi, les vitesses associées à la propagation du front et à l'advection des sédiments avant le front restent identiques quelle que soit la hauteur initiale.

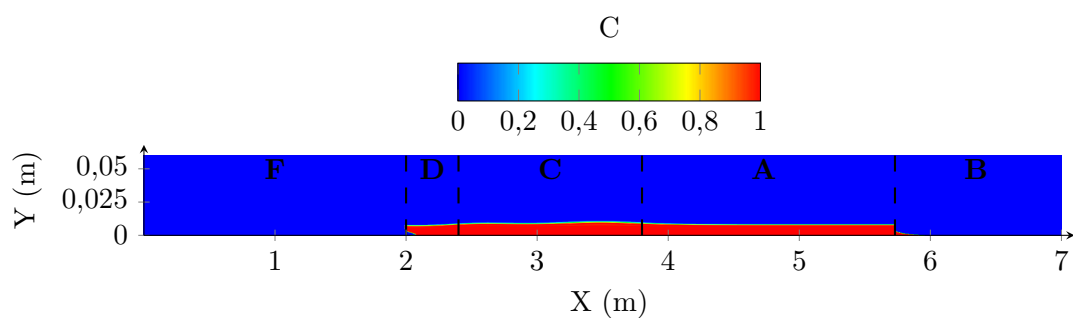
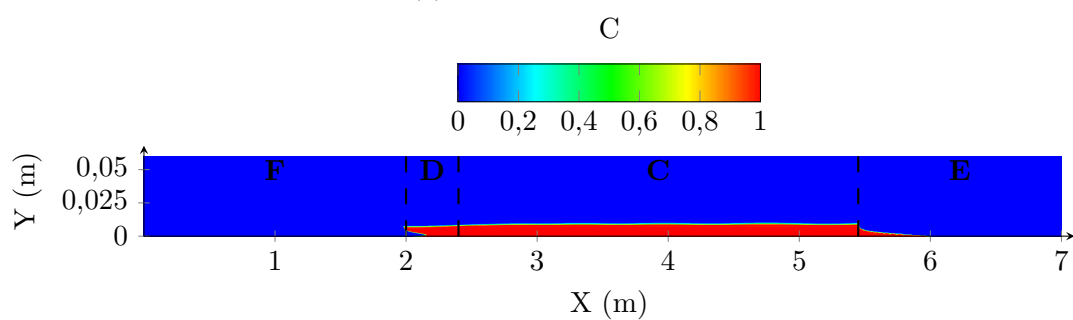
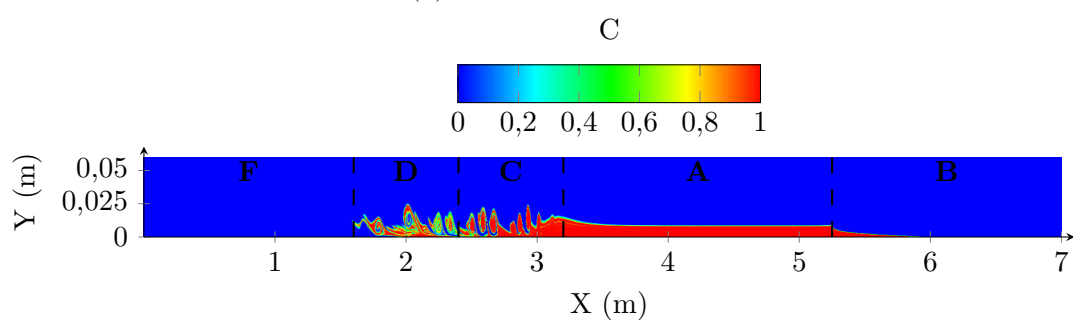
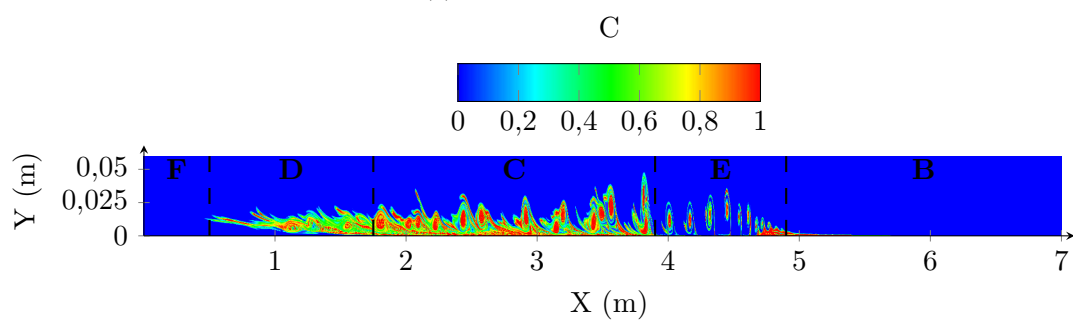
(a) Cas A, $t = 3,5$ s.(b) Cas A, $t = 7,5$ s.(c) Cas B, $t = 6$ s.(d) Cas B, $t = 8,4$ s.

FIGURE 6.29 – Délimitations des différentes zones de transport sédimentaire dans les deux cas A et B à deux instants différents.

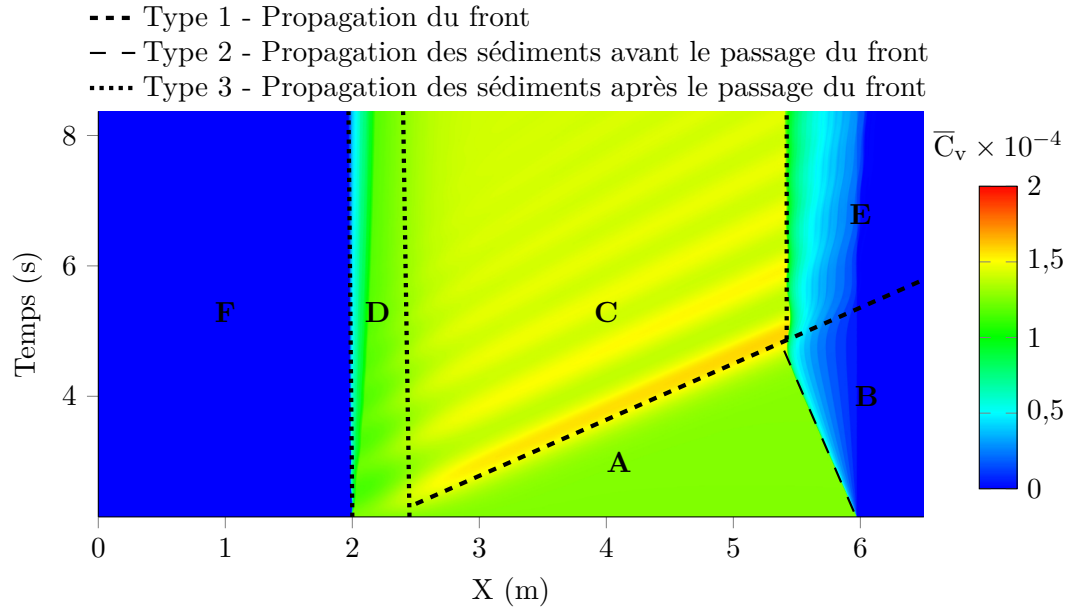


FIGURE 6.30 – Cas A : intégration de la concentration selon la verticale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 0$ cm et $y = 1$ cm.

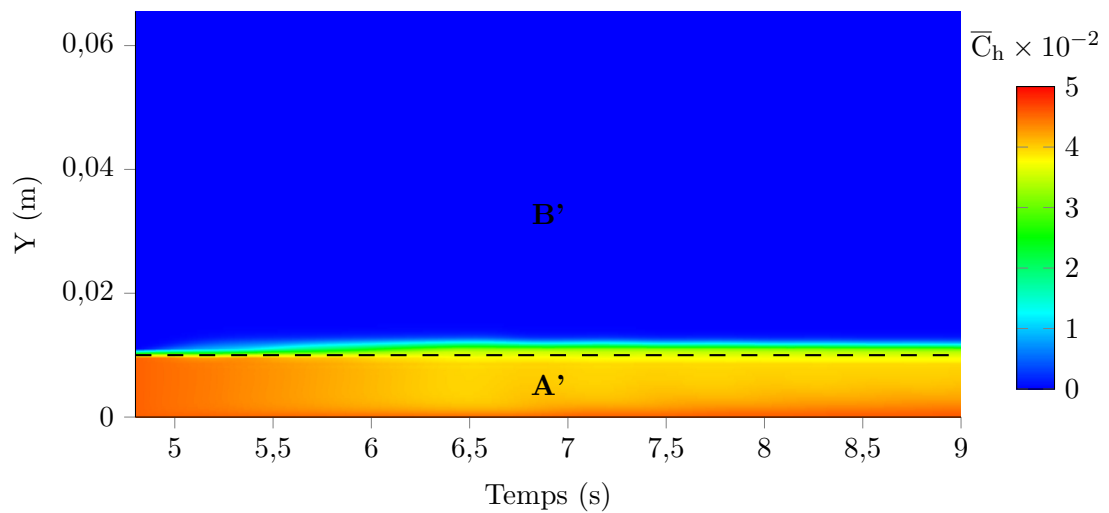


FIGURE 6.31 – Cas A : intégration de la concentration selon l'horizontale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 0$ cm et $y = 1$ cm.

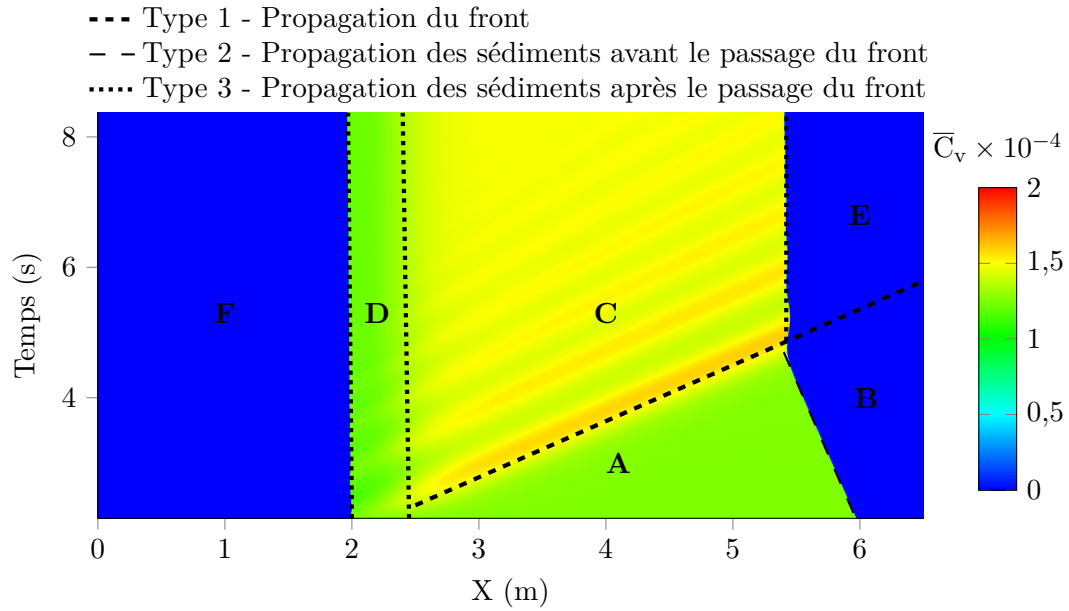


FIGURE 6.32 – Cas A : intégration de la concentration selon la verticale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 2$ cm et $y = 3$ cm.

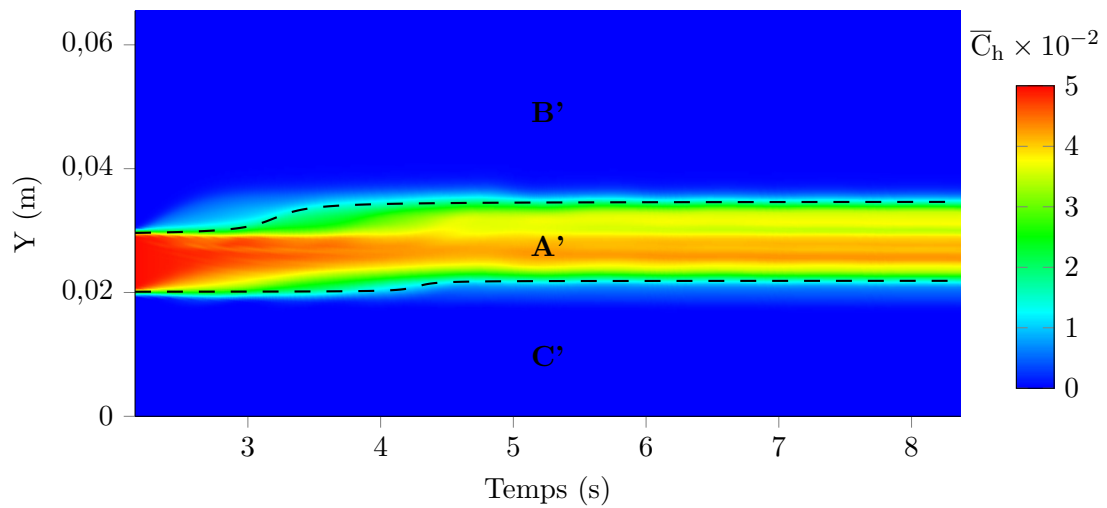


FIGURE 6.33 – Cas A : intégration de la concentration selon l'horizontale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 2$ cm et $y = 3$ cm.

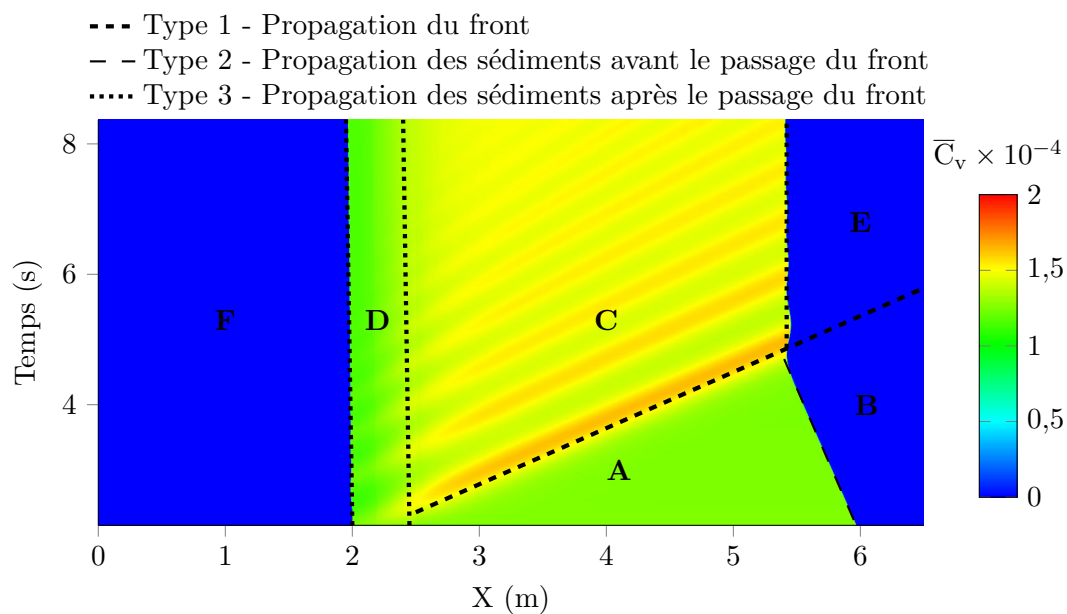


FIGURE 6.34 – Cas A : intégration de la concentration selon la verticale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 10$ cm et $y = 11$ cm.

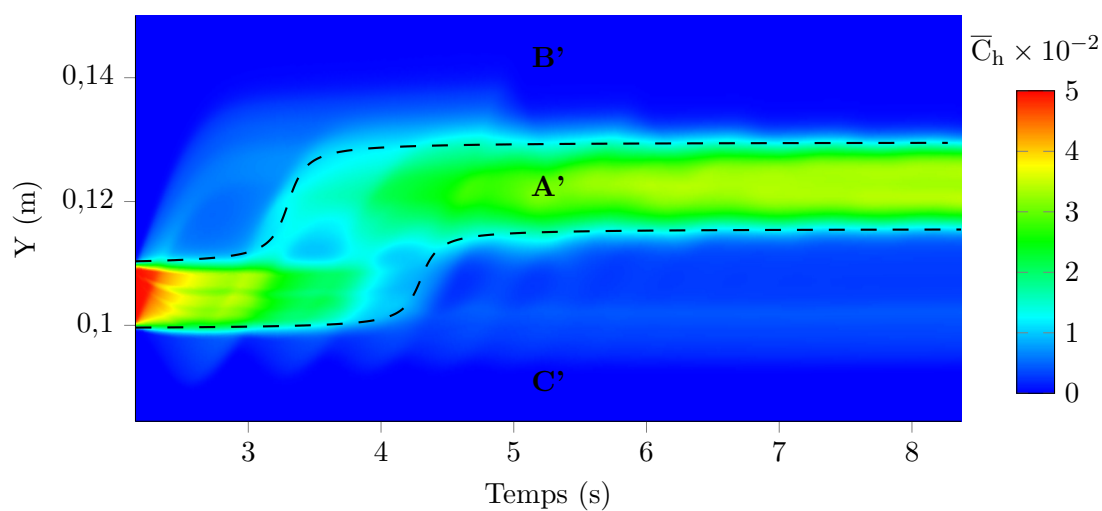


FIGURE 6.35 – Cas A : intégration de la concentration selon l'horizontale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 10$ cm et $y = 11$ cm.

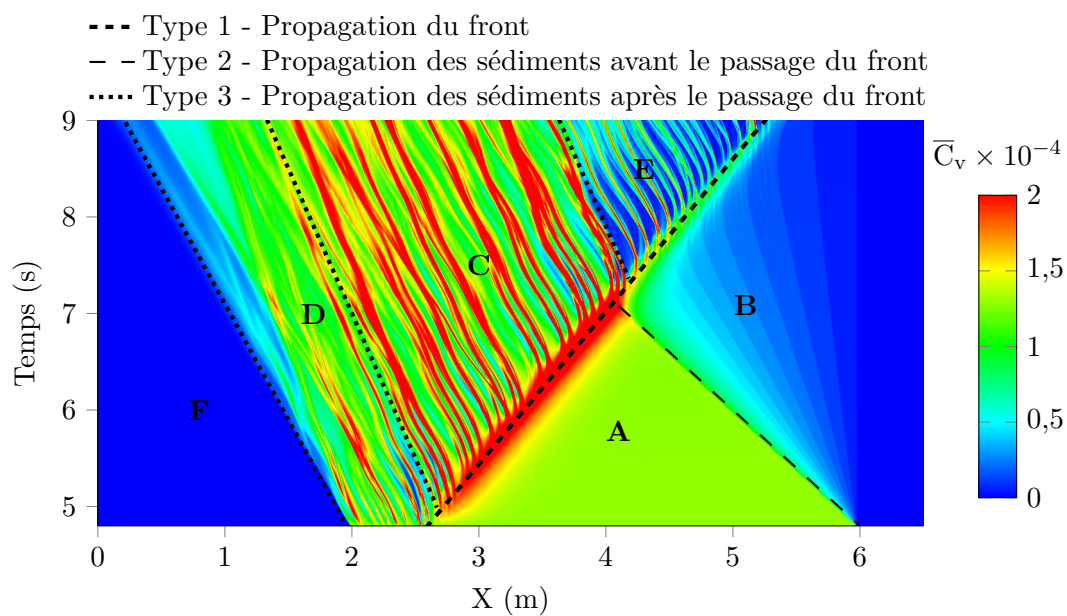


FIGURE 6.36 – Cas B : intégration de la concentration selon la verticale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 0$ cm et $y = 1$ cm.

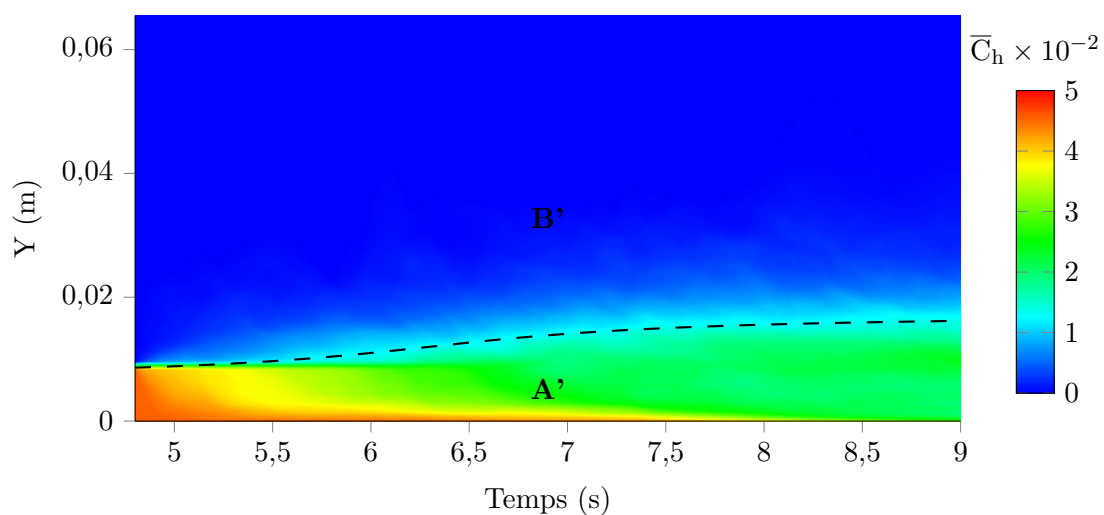


FIGURE 6.37 – Cas B : intégration de la concentration selon l'horizontale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 0$ cm et $y = 1$ cm.

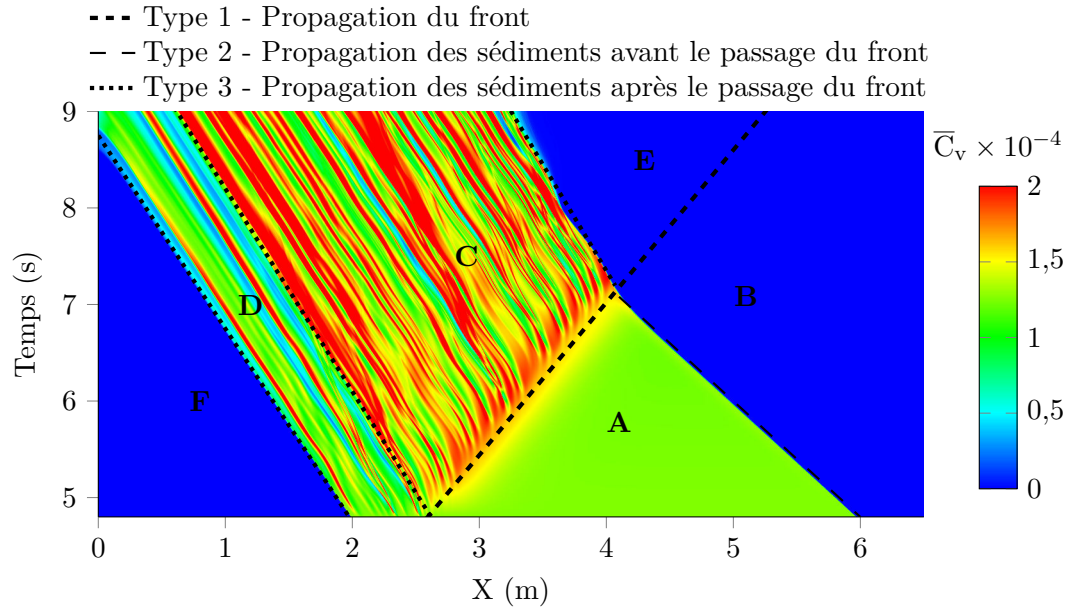


FIGURE 6.38 – Cas B : intégration de la concentration selon la verticale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 2$ cm et $y = 3$ cm.

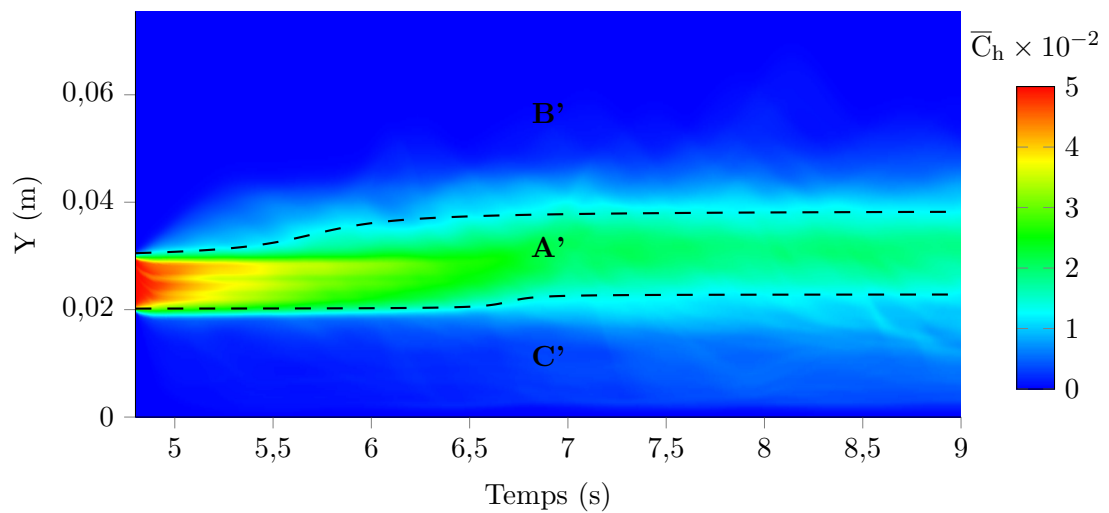


FIGURE 6.39 – Cas B : intégration de la concentration selon l'horizontale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 2$ cm et $y = 3$ cm.

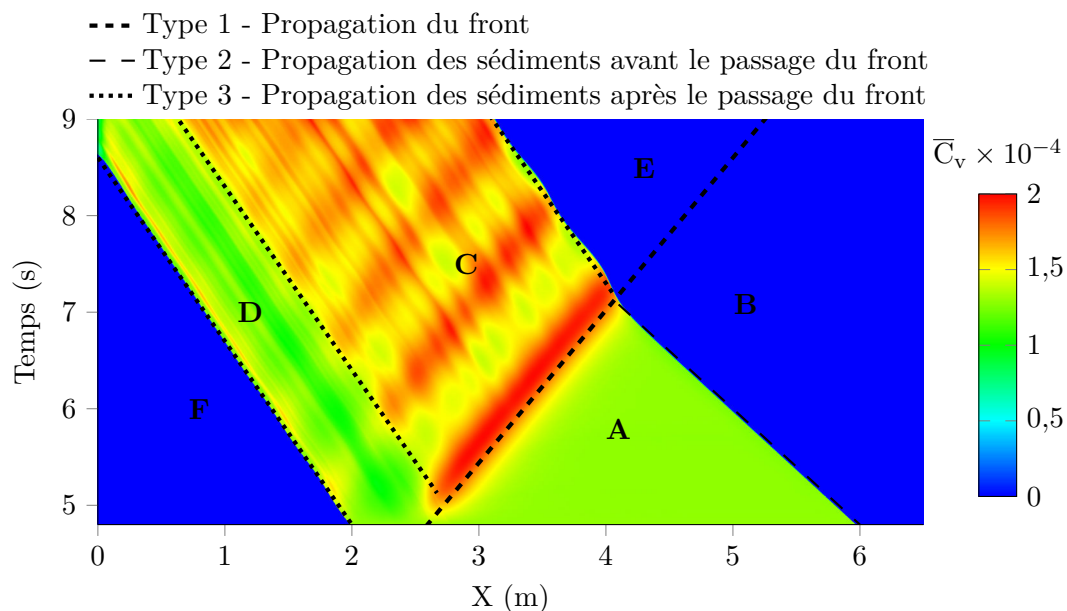


FIGURE 6.40 – Cas B : intégration de la concentration selon la verticale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 10$ cm et $y = 11$ cm.

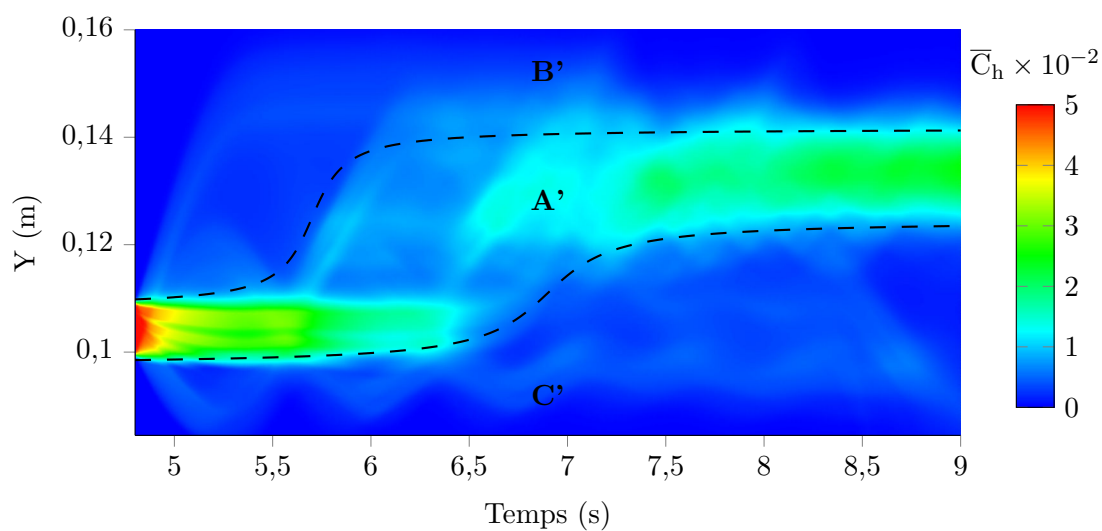


FIGURE 6.41 – Cas B : intégration de la concentration selon l'horizontale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 10$ cm et $y = 11$ cm.

Sur les figures représentant \overline{C}_h (figures 6.31, 6.33, 6.35, 6.37, 6.39 et 6.41) le soulèvement global de la nappe observé précédemment apparaît nettement. Dans les deux cas, ce soulèvement est d'autant plus marqué que la nappe est injectée proche de la surface libre. Ce soulèvement étant dû à l'élévation du niveau moyen lors du passage du front du ressaut. Cependant, le cas B présente une bien plus grande dispersion verticale de \overline{C}_h que le cas A, ce qui se traduit par une frontière beaucoup moins nette entre les zones A' , B' et C' dans ce cas alors qu'elles sont beaucoup plus nettes dans le cas A. Cette dispersion est due aux structures tourbillonnaires qui apparaissent proche du fond.

Par ailleurs, la nappe du fond (figures 6.31 et 6.37) évolue très peu dans le cas A, mis à part une légère dispersion de \overline{C}_h vers le haut. Au contraire, une très forte dispersion est observée dans le cas B, qui traduit les multiples structures tourbillonnaires observées sur la figure 6.24. Cette dispersion se fait prioritairement par le haut, la concentration \overline{C}_h très proche du fond restant à sa valeur initiale pendant plus de 3 secondes alors qu'elle est réduite de moitié en une seconde dans le reste de la nappe.

Pour la nappe injectée à 2 cm du fond (figures 6.33 et 6.39), la dispersion de \overline{C}_h se fait dans un premier temps par le haut puis par le bas, où elle devient la plus intense. Cette dispersion est plus intense sur la partie inférieure car les larges structures tourbillonnaires se déploient à partir de la couche limite du fond et perdent de l'énergie en s'étalant vers le haut. De plus, l'épaisseur de la nappe augmente après qu'elle se soit surélevée, même dans le cas A où la dispersion semble faible. Ceci est dû aux oscillations de la nappe avec les éteules qui, une fois intégrées horizontalement, ont la même signature qu'une dispersion verticale.

Enfin, la nappe injectée à 10 cm du fond présente des caractéristiques similaires à la précédente mais avec une surélévation beaucoup marquée et une dispersion plus faible dans la partie inférieure car les structures tourbillonnaires générées au niveau de la couche limite n'atteignent pas cette hauteur.

Les figures représentant \overline{C}_v (figures 6.30, 6.32, 6.34, 6.36, 6.38 et 6.40) permettent de faire apparaître les manifestations du front, des éteules et des structures tourbillonnaires générées par le ressaut.

L'effet du front apparaît dans la zone C de l'ensemble de ces figures par une augmentation de \overline{C}_v lors de son passage, ce qui traduit le soulèvement évoqué précédemment. Ce soulèvement résulte en une augmentation de \overline{C}_v par deux mécanismes. Le premier est le glissement les unes sur les autres des couches élémentaires formant les nappes à cause du cisaillement local, qui se réorientent pour suivre l'écoulement. Or, si l'on considère que la nappe garde une épaisseur constante et ne fait que s'orienter, l'intégration selon une bande verticale résulte en une valeur plus élevée de \overline{C}_v car la nappe recouvre une plus large part de cette bande lorsqu'elle s'oriente par rapport à l'horizontale. Le second est dû à l'élargissement de la nappe du fait du ralentissement de l'écoulement. Ainsi, chaque orientation et élargissement de la nappe résulte en une valeur élevée de \overline{C}_v . Le front est donc matérialisé pour un instant donné, c'est-à-dire selon un axe horizontal sur ces figures, par une nette

Cas	Position verticale de la frontière inférieure de la nappe à l'injection (cm)	Figure	Type de droite	Vitesse associée (m/s)
A	0	6.30	1	1,16
			2	−0,22
			3	$\simeq 0$
	2	6.32	1	1,16
			2	−0,22
			3	$\simeq 0$
	10	6.34	1	1,16
			2	−0,22
			3	$\simeq 0$
B	0	6.36	1	0,63
			2	−0,83
			3	−0,33
	2	6.38	1	0,63
			2	−0,83
			3	−0,47
	10	6.40	1	0,63
			2	−0,83
			3	−0,52

TABLE 6.2 – Vitesses d'advection des sédiments associées aux trois types de droites présentes sur les figures 6.30, 6.32, 6.34, 6.36, 6.38 et 6.40.

augmentation de \overline{C}_v . Ensuite, chaque éteule induit une augmentation de \overline{C}_v par le ralentissement ponctuel de l'écoulement qu'elle engendre, comme présenté sur la figure 6.27. Par ailleurs, du fait que la vague du front est très asymétrique, c'est-à-dire que sa hauteur amont est bien inférieure à sa hauteur aval, et du ralentissement de l'écoulement au niveau du front, l'épaisseur de la nappe ne revient pas à sa valeur initiale mais reste plus épaisse une fois le front passé. Cet effet apparaît dans la zone C car après le passage du front, \overline{C}_v oscille autour d'une valeur supérieure à sa valeur initiale. Au contraire, les portions de nappes injectées après le passage du front, qui sont délimitées par la zone D , ne subissent pas d'épaississement. Ceci se traduit par une oscillation d'amplitude faible, uniquement due aux éteules, autour d'une valeur moyenne qui reste égale à la valeur initiale.

On observe dans la zone B des figures 6.30 et 6.36 une concentration \overline{C}_v non nulle, qui décroît lentement à partir de la zone A jusqu'à parvenir à une valeur nulle. Ceci traduit l'effet de la couche limite sur l'advection des sédiments : plus on s'approche du fond et moins les sédiments sont advectés, ce qui ne permet pas d'évacuer toutes les couches élémentaires de la nappe à la même vitesse. Ainsi, les couches les plus proches du fond ont une vitesse quasi-nulle et ne suivent donc pas la droite marquant la frontière entre les zones A et B . Une fois le front passé, les sédiments restés dans la zone B sont perturbés par les structures générées par le passage du front, ce qui explique la présence de concentration \overline{C}_v non nulle dans la zone E . Au contraire, les figures 6.32, 6.34, 6.38 et 6.40 ne présentent pas cette caractéristique car elles sont situées au-dessus de la couche limite. Les zones B et E restent donc vides de sédiments. Enfin, une zone localisée proche du fond sous le front présente un retournement de l'écoulement. Cette zone a pour effet d'entraîner une part de sédiments de la zone C vers la zone E , ce qui accentue encore la présence de ceux-ci dans la zone E dans le cas de la nappe la plus profonde.

Enfin, dans le cas B spécifiquement, des structures supplémentaires très fines apparaissent (figures 6.36, 6.38 et 6.40). Celles-ci sont dues aux structures tourbillonnaires, due à la déstabilisation de la couche limite par le ressaut, dont la taille caractéristique est petite devant la taille caractéristique des oscillations dues au front et aux éteules. Elles sont formées dès la première surélévation due au front et leur forme évolue peu ensuite. Toutes ces structures évoluent parallèlement aux lignes du type 3 (.....), ce qui signifie qu'après leur formation elles sont advectées à la vitesse de l'écoulement après le passage du front. On remarque que ces structures apparaissent à la fois dans les zones C et D (et même E dans le cas de la nappe la plus profonde du fait des effets de couche limite), ce qui signifie que ces structures restent dynamiques de manière pérenne après le passage du front. De même, dans la zone E dans le cas de la nappe la plus profonde, ces structures apparaissent car elles sont alimentées par les sédiments qui n'ont pas été évacués du fait des effets de la couche limite.

6.2.3 Méthode des moments

La dernière étude concernant les deux ressauts fait intervenir la méthode des moments. Grâce à cette méthode, il sera possible de quantifier l'étalement d'un petit nuage de grains sédimentaires au court du temps selon les directions horizontale et verticale. Initialement, la concentration en sédiments est considérée comme uniforme au sein de la colonne d'eau. Le nuage étudié par la méthode des moments sera donc à distribution uniforme. La forme de ce nuage est arbitrairement fixée à un disque afin de ne privilégier aucune direction à l'instant initial. Comme nous l'avons vu en 6.2.1, les effets dus à la dispersion turbulente sont très faibles du fait du temps de simulation très court. De même, les effets de pesanteur ne font que décaler les grains sédimentaires mais ne modifie que peu les autres aspects de leurs trajectoires, il est donc possible de considérer que la forme d'un nuages de grains sédimentaires de même masse volumique sera peu affectée par la pesanteur. Ces deux effets seront donc négligés dans cette partie pour se concentrer sur les effets de l'advection et des cisaillements locaux. Les trajectoires ayant déjà été étudiées en 6.2.1, seuls l'étude de l'évolution des moments est effectuée ici.

Dans cette partie, la méthode des moments utilise la division des particules numériques pour suivre leur évolution car nous avons vu que cette méthode était mieux adaptée aux écoulements complexes, comme c'est le cas ici, que la méthode utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2. Le nuage initial n'est représenté que par une seule particule circulaire dont les moments initiaux sont calculés analytiquement. La taille du nuage est fixée à 1 cm et la hauteur d'injection est $h = 10$ cm dans les deux cas A et B.

La figure 6.42 présente l'évolution des moments d'ordre 2 normalisés par la valeur initiale du moment $M_{x,2}$ pour les deux cas A et B. On remarque que, malgré des trajectoires très différentes, les moments évoluent de manière très similaire. Pour les deux cas A et B, la trajectoire peut être décomposée en trois parties :

- la première zone avant l'arrivée du ressaut dans laquelle la forme des nuages de grains ne varie pas et les moments restent donc constants.
- une seconde zone au niveau du front du ressaut dans laquelle les moments $M_{x,2}$ diminuent brutalement tandis que les moments $M_{y,2}$ augmentent encore plus brusquement.
- une troisième partie dans laquelle les moments oscillent autour d'une valeur moyenne avec une amplitude qui s'atténue avec le temps.

L'amplitude des oscillations est supérieure dans le cas B du fait d'oscillations plus importantes de la surface libre que dans le cas A. La longueur d'onde de ces oscillations est au contraire légèrement inférieure dans le cas B. Par ailleurs, les moments oscillent autour de valeurs moyennes qui évoluent lentement dans le cas B alors que les valeurs moyennes restent constantes dans le cas A. Cette lente évolution indique la présence d'un cisaillement de faible amplitude mais à grande échelle, comme décrit dans la section 6.2.2.

Comme précédemment, nous allons tenter de dissocier les effets de l'élévation

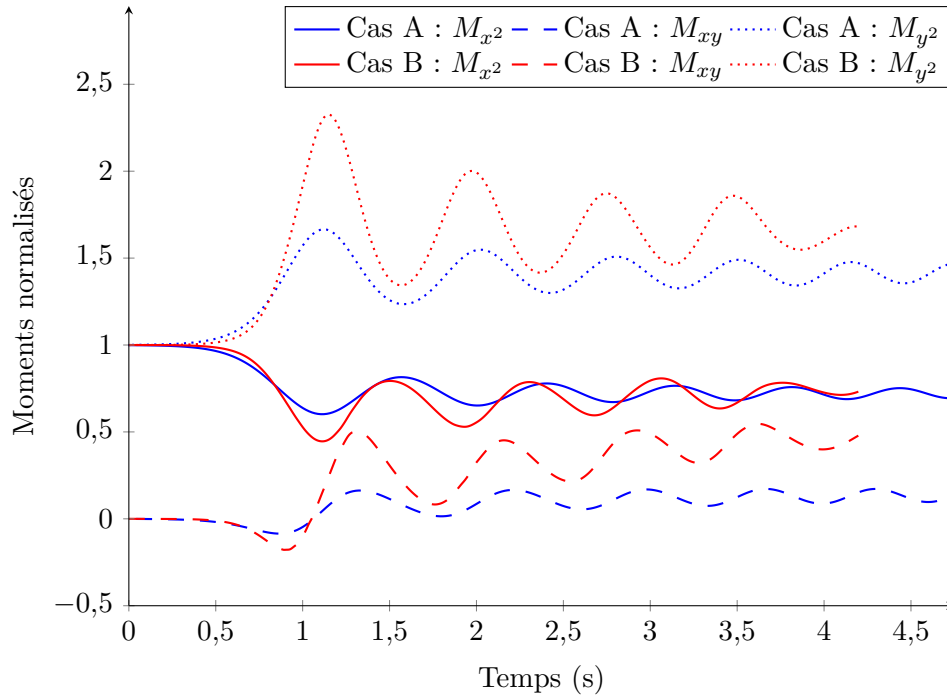


FIGURE 6.42 – Évolution des moments M_{x^2} , M_{xy} et M_{y^2} dans les cas A et B pour des nuages de grains de 1 cm de diamètre injectés à $h = 0,1$ m.

au niveau du front et des oscillations dues au éteules en aval du front. Pour cela, des nuages de grains sédimentaires sont injectés dans deux nouveaux écoulements, toujours générés grâce au code **Thétis** lors de la thèse de **Simon (2013)**. Le premier écoulement, appelé *cas C*, est une rupture de barrage sur un fluide au repos et dont le nombre de Froude est égal à $Fr = 1,26$, ce qui induit un déferlement au niveau du front mais limite les oscillations après celui-ci. Les détails concernant la génération de cet écoulement sont précisés par **Vincent et Caltagirone (2004)**. Cet écoulement, représenté en figure 6.43, permet de modéliser la surélévation du niveau moyen qui se produit lors du passage du front. Le nuage de grains sera injecté suffisamment loin de la surface libre afin de pouvoir supposer que le déferlement de celle-ci n'influe pas sur le résultat, c'est-à-dire à $h = 5$ cm. Le second écoulement est un soliton de type *Grimshaw*, c'est à dire une onde se déplaçant de la gauche vers la droite dans un fluide au repos (**Lubin et Lemonnier, 2004**). Cet écoulement, représenté en figure 6.44, sera appelé *cas D* et permet de modéliser une des éteules apparaissant en aval du front. La principale différence étant que l'écoulement est identique de part et d'autre du soliton tandis que ce n'est pas tout à fait le cas pour les éteules, du fait de l'atténuation de leur amplitude en fonction de leur distance au front du ressaut. Cette fois-ci, le nuage de grains sera injecté à $h = 10$ cm.

La figure 6.45 présente l'évolution des moments d'ordre 2 dans le cas de la rupture de barrage et la figure 6.46 retrace l'évolution de la trajectoire et de la forme

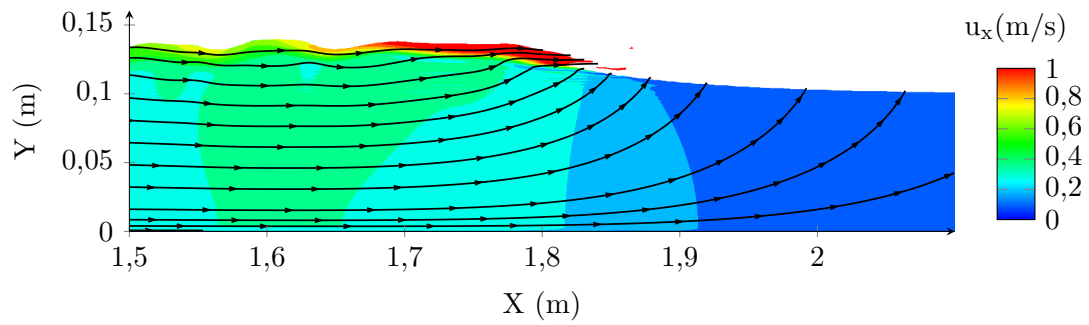


FIGURE 6.43 – Écoulement de rupture de barrage utilisé pour la modélisation de la surélévation au niveau du front du ressaut.

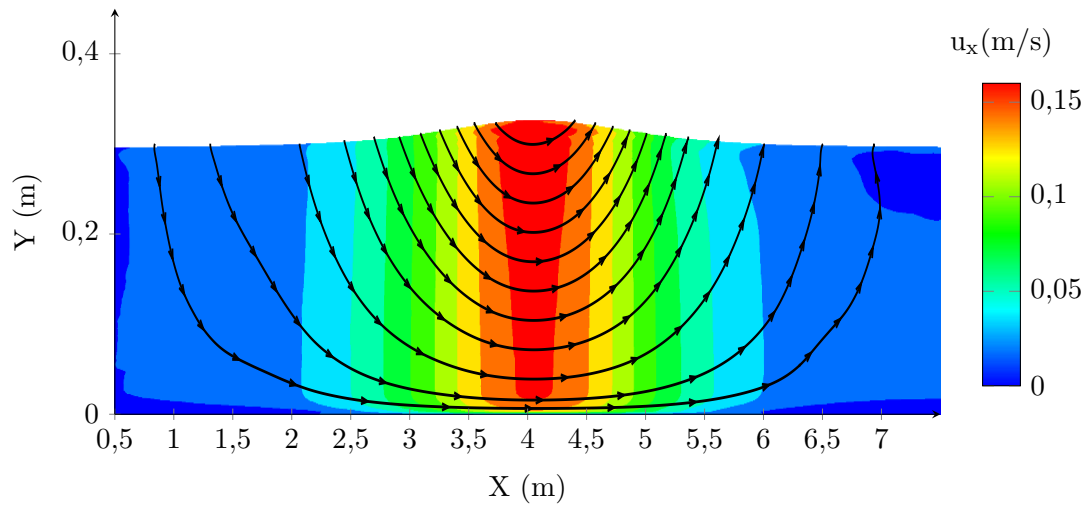


FIGURE 6.44 – Écoulement de soliton utilisé pour la modélisation des éteules.

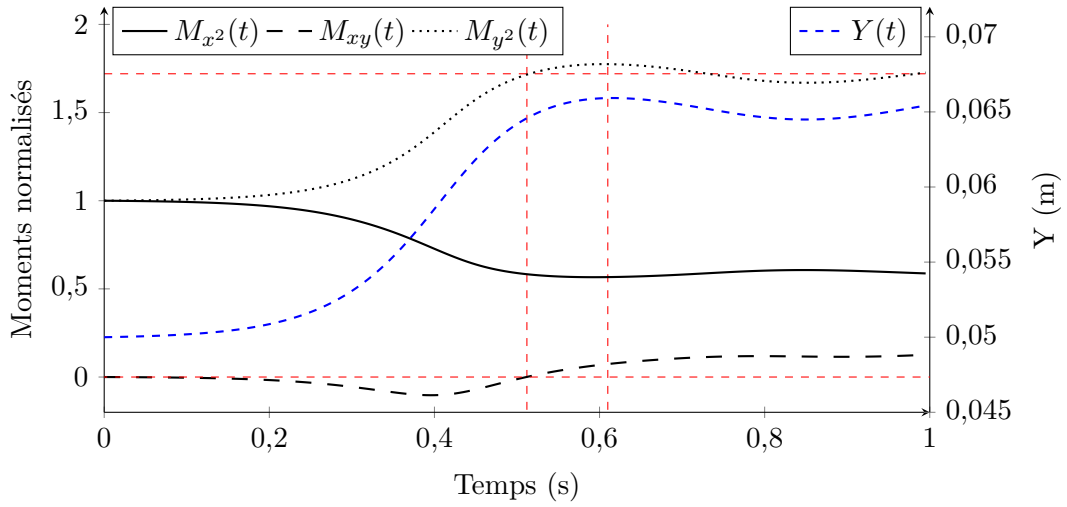


FIGURE 6.45 – Évolution des moments d'ordre 2 dans le cas de la rupture de barrage (cas C).

du nuage de grains au cours du temps. On remarque que lorsque le nuage traverse le front du ressaut, donc lorsque $y(t)$ augmente, il se contracte horizontalement, ce qui entraîne une diminution du moment M_{x^2} , et s'étire verticalement, ce qui se traduit par une augmentation du moment M_{y^2} . Par ailleurs, son orientation, représentée par le moment M_{xy} , est dans un premier temps positive, c'est-à-dire que l'angle entre l'horizontal et le grand axe de l'ellipse est compris entre 0 et $\pi/2$, revient en $M_{xy} = 0$ avant que le nuage n'atteigne sa hauteur maximale et se stabilise ensuite à une valeur positive. Ainsi, la première rotation du nuage intervient très rapidement, avant même que celui-ci ne commence son ascension. L'ascension elle-même se fait ensuite à angle quasi-constant et la diminution du moment M_{xy} entre $t = 0,2$ s et $t = 0,4$ s n'est due qu'aux seules elongation verticale et contraction horizontale progressives. Au contraire, l'augmentation de ce moment entre $t = 0,4$ s et $t = 0,5$ s jusqu'à une valeur nulle est majoritairement due à l'orientation du nuage qui revient à la verticale. Par la suite, la dernière phase d'augmentation se fait par un basculement du nuage dans le sens opposé du fait de la présence d'un cisaillement horizontal.

La figure 6.47 présente l'évolution des moments d'ordre 2 dans le cas du soliton et la figure 6.48 permet de visualiser l'évolution de la trajectoire et de la forme du nuage de grains au cours du temps. Le début de l'évolution du nuage dans ce cas, qui correspond à la phase ascendante du nuage, est identique à celle dans le cas de la rupture de barrage : une diminution du moment M_{x^2} , une augmentation du moment M_{y^2} et une diminution du moment M_{xy} dans un premier temps suivit d'une augmentation jusqu'à une valeur positive. Cependant, la suite de l'évolution diffère du cas précédent. Cette fois-ci, les moments évoluent en sens inverse durant la phase descendante, jusqu'à revenir à leurs valeurs initiales. Le moment M_{xy} ne

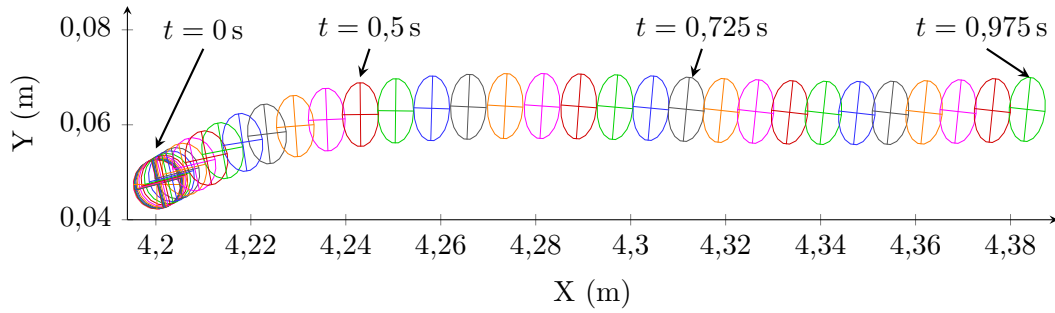


FIGURE 6.46 – Évolution du nuage de grains sédimentaires dans le cas de la rupture de barrage (cas C).

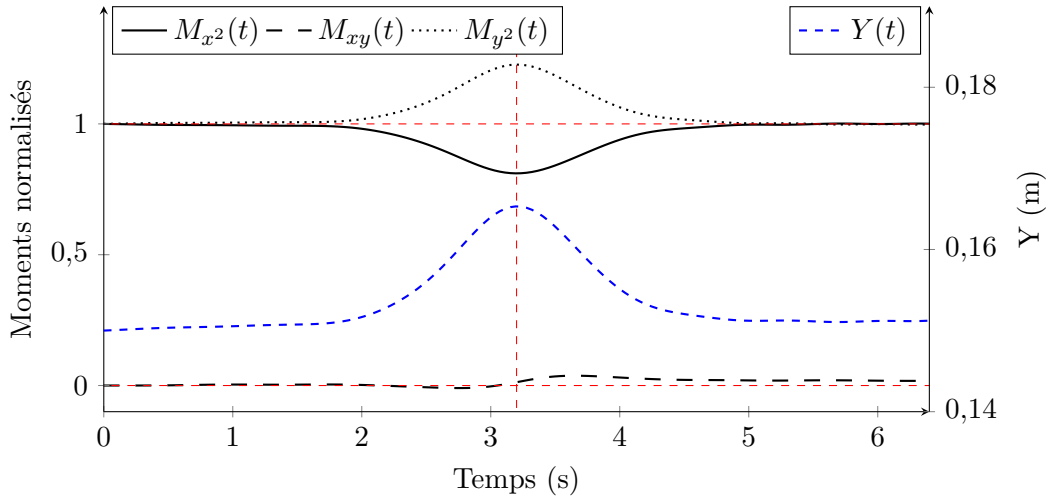


FIGURE 6.47 – Évolution des moments d'ordre 2 dans le cas du soliton (cas D).

retrouve pas tout à fait sa valeur initiale du fait de la forte non-linéarité du soliton choisi qui est de type *Grimshaw*.

En rassemblant ces diverses observations, il est donc possible de modéliser grossièrement l'évolution d'un nuage de grains sédimentaires dans le cas d'un ressaut hydraulique (cas A ou B) par dans un premier temps un net effet de la surélévation du niveau moyen, comme dans le cas de la rupture de barrage, et dans un second temps d'une succession d'oscillations autour de valeurs moyennes, comme dans le cas d'une succession de solitons. Ce modèle est résumé en figure 6.49. Ainsi, l'évolution de la forme d'un nuage de grains semble identique dans les deux cas étudiés, que le courant soit nul ou non après le passage du front. Les déformations d'un tel nuage sont donc entièrement conditionnées par les éteules et non par le courant. Celui-ci ne jouant un rôle que dans la détermination de la trajectoire du centre de masse de nuage.

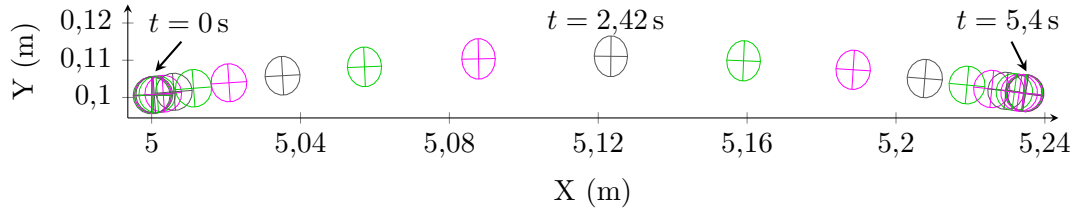


FIGURE 6.48 – Évolution du nuage de grains sédimentaires dans le cas du soliton (cas D).

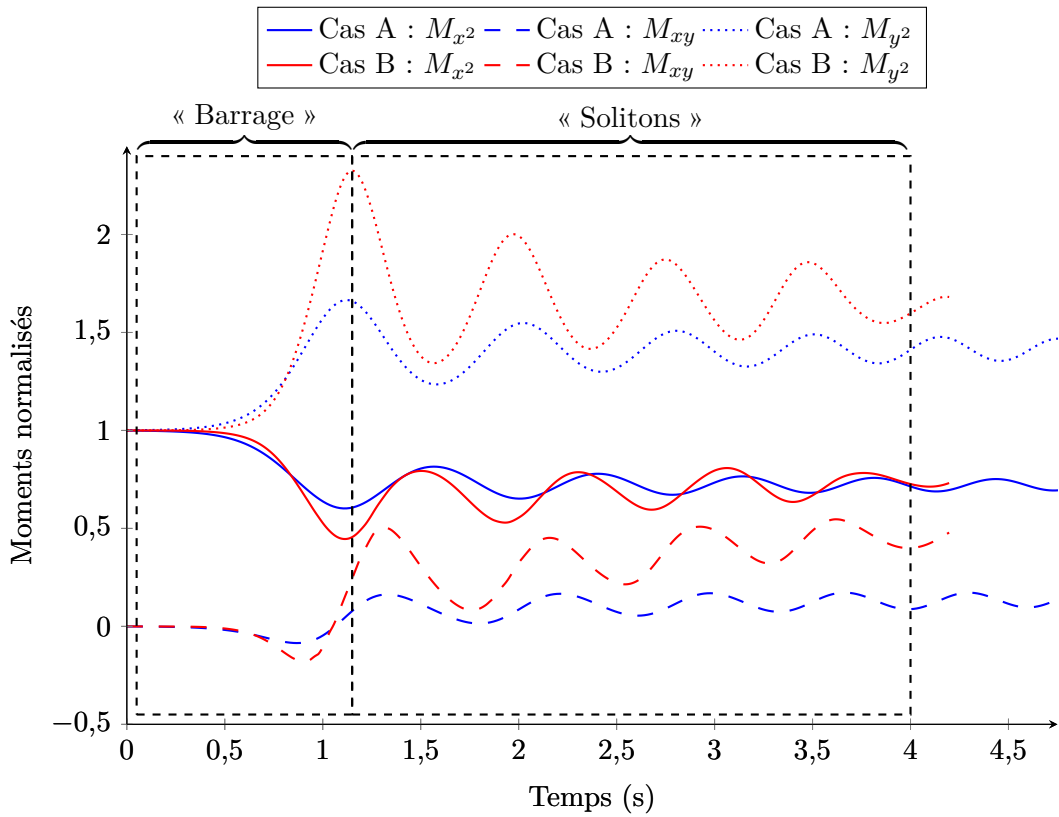


FIGURE 6.49 – Évolution des moments M_{x^2} , M_{xy} et M_{y^2} dans les cas A et B et zones de modélisation par une surélévation de type rupture de barrage et par des oscillations de type soliton.

6.2.4 Conclusion

Les résultats concernant les mascarets sont basés sur les trois méthodes présentées dans les chapitres précédents, chacune permettant d'obtenir des informations différentes sur le transport sédimentaire : la méthode tracker (chapitre 2), la méthode particulaire (chapitre 3) et la méthode des moments (chapitre 4). Le suivi des trajectoires des grains sédimentaires de manière individuelle nous a permis de simuler les trajectoires de ces grains pour différentes masses volumiques et de proposer un modèle permettant de décomposer ces trajectoires tant qu'elles n'entrent pas dans la zone d'influence de la couche limite. Ce modèle permet de décomposer les trajectoires observées et de mettre en avant l'importance de certains aspects du mascaret. Deux types de trajectoires ont été observées : des trajectoires rubanaires enroulées dans le cas d'un ressaut hydraulique dominé par les éteules et des trajectoires rubanaires ondulantes dans le cas d'un ressaut hydraulique dominé par le courant. Dans les ressauts hydrauliques testés, supposés proches d'un mascaret ondulant, l'effet de la gravité semble constant et peu affecté par l'aspect inertiel ou bien encore le terme d'histoire, qui ont pourtant un impact très important à court terme sur la sédimentation (voir chapitre 2) mais très faible à long terme, c'est à dire pour un temps $t \geq 0,5$ s. Par ailleurs, le modèle proposé semble indiquer que l'effet de la transition qui s'opère au niveau du front sur la trajectoire d'un grain est très localisé et que cette trajectoire peut finalement se décomposer en trois parties :

- avant le front du ressaut, le grain est advecté horizontalement par l'écoulement constant et sédimente lentement du fait de sa masse volumique supérieure à celle du fluide.
- au niveau du front, la transition du ressaut de la vitesse U_1 à la vitesse U_2 et de la hauteur h_1 à la hauteur h_2 induit un soulèvement et un ralentissement des grains.
- après le front du ressaut, la trajectoire des grains prend une forme connue dans le cadre des interactions onde-courant (Chen *et al.*, 2012a) qui n'en diffère que par l'atténuation progressive des éteules.

Cette décomposition intuitive, bien que probablement invalide du point de vue hydrodynamique du fait de la non-linéarité très prononcée du phénomène, donne une bonne description des trajectoires des grains sédimentaires. Par ailleurs, elle semble indiquer une piste de modélisation du mascaret ondulant comme étant la superposition d'un courant qui ralenti au niveau du front, d'une surélévation du niveau moyen et d'une *onde solitaire négative* décrite par Russell (1845) et accompagnée de ce qu'il appelle des *ondes du second ordre* qui représenteraient les éteules. Ce type d'écoulement avait aussi été étudié par Bazin et Darcy (1865) mais Russell en fait une description plus détaillée et s'est aussi intéressé aux trajectoires d'objets soumis à cet écoulement. La figure 6.50 montre la description que fait Russell de cette onde solitaire négative et des trajectoires des grains sédimentaires dans cet écoulement. Cette modélisation n'a pu être explorée à l'heure actuelle et nécessite la génération de nouveaux écoulements et d'une étude paramétrique poussée afin

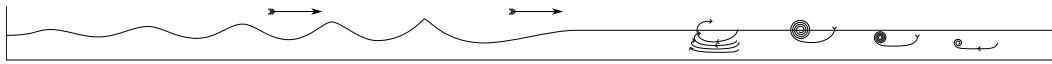


FIGURE 6.50 – Forme de l’onde négative décrite par Russell et trajectoires associées des grains sédimentaires. Cette figure est une copie de la figure 9 de Russell (1845).

de la valider.

Un phénomène de type saltation a été détecté pour des grains sédimentaires dont la masse volumique se situe dans une gamme comprise entre 1800 kg/m^3 et 2200 kg/m^3 , lorsque leur diamètre est égal à $d_i = 100 \mu\text{m}$. En effet, lorsque la masse volumique des grains sédimentaires le permet, les puissants courants ascendants présents dans le fond de l’écoulement, notamment au niveau des zones de retournement, peuvent entraîner les grains jusqu’à une vitesse verticale importante qui donnera lieu à une portion de trajectoire quasi-balistique du fait de leur inertie. Cependant, les grains dont la masse volumique est inférieure à cette gamme suivent l’écoulement de trop près pour observer ce type de trajectoire, leur inertie étant trop faible pour avoir un impact notable. De même, les grains ayant une masse supérieure à cette gamme sédimentent trop rapidement et ont trop d’inertie pour pouvoir être emportés par les courants ascendants qui ne peuvent donc pas leur conférer une vitesse suffisante pour que leur trajectoire ait une forme semi-balistique de type saltation. Ce type de trajectoire ne peut actuellement être représentée par la méthode particulaire et la méthode des moments puisqu’elles modélisent des grains non-inertiels. Des termes supplémentaires devront être ajoutés pour prendre en compte cet effet.

La mise en œuvre de la méthode particulaire ainsi que la représentation spatio-temporelle de l’évolution de la concentration intégrée horizontalement ou verticalement, ont permis de faire apparaître des mécanismes de transport sédimentaire de manière plus globale. La consistance des méthodes utilisées garantit que la concentration reste toujours positive, ce qui assure une bonne représentation de la physique. La dispersion turbulente ainsi que la sédimentation sont de faible importance dans les cas étudiés. L’advection par le courant est alors le principal mécanisme de transport. Un net soulèvement des sédiments se distingue au niveau du front, même proche du fond, qui peut ensuite perdurer longtemps du fait de la faible vitesse de chute des grains étudiés. La combinaison du ralentissement et de la surélévation au niveau du front induisent par ailleurs une dispersion verticale des sédiments du fait de la conservation de la masse qui perdure durablement puisque aucun mécanisme ne s’y oppose. Cette dispersion verticale est nettement plus importante que la dispersion due à la turbulence de sous-maille. De plus, des structures tourbillonnaires apparaissent près du fond dans le cas du ressaut dominé par le courant (cas B) du fait d’une déstabilisation de la couche limite par le passage du front, ce qui n’est pas le cas lorsque le courant après le front du ressaut est nul puisqu’il n’y a alors plus de véritable couche limite. Ces structures induisent des soulèvements ponctuels de sédiments et des enroulements, ce qui a pour effet de rassembler les sédiments en bouffées qui sont ensuite advectées par le courant moyen. Enfin, sous le front

du ressaut, dans la zone proche du fond, les zone de retournement du courant induisent un faible transport de sédiments vers l'amont du canal, allant à l'encontre du courant moyen.

La méthode des moments a enfin permis de montrer que les déformations d'un petit nuage de grains sédimentaires, qui représentent les déformations locales des nappes de sédiments étudiées par la méthode particulière, sont majoritairement induites par les éteules et non par le courant. Un modèle simple a été proposé dans lequel l'évolution des nuages de sédiments serait décomposée selon deux origines distinctes : un effet de surélévation et de ralentissement similaire à ce qui est rencontré dans un écoulement de type rupture de barrage puis un effet d'oscillations due aux éteules similaire à celui d'une succession de solitons dont l'amplitude décroît. Cette seconde partie pourrait être proche de celle observée dans un soliton négatif de [Russell](#) mais cette piste n'a pu être explorée à l'heure actuelle.

Conclusion et perspectives

Cette thèse avait pour objectif de développer des codes de calcul permettant l'étude du transport sédimentaire en suspension à différentes échelles et de différentes manières puis de les appliquer au cas spécifique du transport sédimentaire induit par le passage d'un mascaret dans un fleuve. Ces codes utilisent des méthodes de transport direct de grains sédimentaires ou de transport de concentration en grains sédimentaires dans un écoulement. Cet écoulement peut être soit numérique, généré alors par le code de calcul *Thétis*, soit expérimental dont la mesure est résolue en temps et en espace.

La méthode de transport direct, dite méthode tracker, a permis le suivi de grains sédimentaires individuels. Il a été montré que pour les grains sédimentaires étudiés, aucun terme de l'équation de *Maxey et Riley (1983)* ne peut être négligé et des trajectoires types ont été identifiées dans le contexte du mascaret ondulant. Deux types de trajectoires apparaissent dans la zone supérieure de l'écoulement, c'est-à-dire la zone non perturbée par la couche limite et par la turbulence qui lui est associée : le premier type a été dénommé *trajectoire rubanaire enroulée* et se manifeste dans le cas où le mascaret est dominé par les éteules, c'est-à-dire que le courant en aval du front est très faible voire nul, et présente une forme en spirale couplée à une dérive verticale due à la gravité et une dérive horizontale due au faible courant qui peut subsister en aval du front. Le second type est appelé *trajectoire rubanaire ondulante* et apparaît dans le cas d'un mascaret dominé par le courant, c'est-à-dire que le courant en aval du front reste important malgré le passage du mascaret. Ces trajectoires présentent une forme ondulante, sans boucle, couplée à une dérive verticale due à la gravité. Un modèle simple a été proposé pour décrire ces trajectoires et donne de bons résultats dans les deux cas étudiés. Il consiste à décomposer ces trajectoires en quatre composantes que sont la surélévation au passage du front, le ralentissement de l'écoulement au même moment, la gravité dont l'effet est supposé constant au cours du temps et une interaction onde-courant dont l'amplitude décroît en temps pour représenter les éteules. Ce modèle indique l'importance de la surélévation qui a lieu au niveau du front et que l'hypothèse d'une vitesse constante de sédimentation est une bonne approximation dans les cas étudiés. Il semble aussi indiquer qu'une fois les effets de la gravité, du ralentissement et de la surélévation retirés, la trajectoire soit très proche de celle observée par *Russell (1845)* lors de ses études sur les ondes solitaires négatives. Une étude sur d'autres cas à des nombres de Froude différents et des conditions de génération différentes serait cependant nécessaire pour confirmer la validité du modèle de manière générale. Enfin, la méthode

tracker a aussi permis de représenter le comportement de type saltation des grains sédimentaires dont la masse volumique se situe entre 1500 et 2200 kg/m³.

La méthode particulaire, qui permet le suivi de l'évolution de la concentration en sédiments, a été adaptée au contexte particulier des mesures expérimentales dont les champs mesurés ne sont pas à divergence nul. Il sera ainsi possible d'utiliser les données de vitesse recueillies en laboratoire dans des canaux afin de simuler le transport dans ces écoulements. L'application de cette méthode au mascaret montre là encore l'effet important du soulèvement occasionné par le passage du front. L'effet des éteules est beaucoup moins marqué dans les deux cas étudiés, bien qu'elles alimentent la turbulence au niveau de la couche limite. Différentes zones ont été répertoriées en traçant l'évolution spatio-temporelle de nappes sédimentaires injectées à différentes hauteurs. L'effet du front apparaît alors très nettement dans les deux cas étudiés. Des structures de petites tailles générées par la déstabilisation de la couche limite au passage du front apparaissent dans le cas du mascaret dominé par le courant et sont ensuite advectées vers l'aval du fleuve, ce qui n'est pas le cas pour le mascaret dominé par les éteules. Une différence importante apparaît donc au niveau du transport sédimentaire entre ces deux écoulements malgré que leurs nombres de Froude soient proches. Là encore, une confirmation devra être réalisée par l'étude d'autres configurations de mascarets avec des nombres de Froude différents ainsi que des conditions de génération différentes. Une amélioration de la méthode sera nécessaire afin de pouvoir représenter les effets de saltation observés avec la méthode tracker. Une première solution pourrait être de déplacer le centre des particules numériques en utilisant l'équation de [Maxey et Riley \(1983\)](#) plutôt que la simple équation de transport. Cependant, le coût en temps de calcul serait très important et il serait difficile de concilier le terme d'histoire et l'opération de remaillage nécessaire au bon déroulement du calcul. Par la suite, les modèles de turbulence devront être améliorés et des modèles d'érosion du fond et des berges devront être implémentés afin de rendre compte de l'ensemble des phénomènes intervenant dans le transport sédimentaire lors du passage d'un mascaret.

La méthode des moments, qui permet de quantifier les déformations d'un nuage de sédiments au cours de son évolution, a été appliquée d'une part à l'étude des milieux poreux et d'autre part à l'étude du mascaret. Dans le cadre des milieux poreux, elle permet d'obtenir des résultats proches des méthodes classiques mettant en jeu un très grand nombre de particules numériques et donc de réduire considérablement le temps de calcul. Des études complémentaires permettront de définir la plage d'applicabilité de cette méthode puisque plus le milieu considéré sera hétérogène et moins la méthode des moments sera adaptée. Dans le cadre du mascaret, cette méthode a permis de montrer que l'évolution de la forme du nuage est très similaire, aussi bien dans le cas où le mascaret est dominé par les éteules que dans le cas où il est dominé par le courant. Un cisaillement à grande échelle mais de faible intensité a été détecté dans le cas du mascaret dominé par le courant qui est principalement attribué au blocage de la partie supérieure de l'écoulement par la porte. Ce cisaillement peut donc être uniquement dû aux conditions de génération

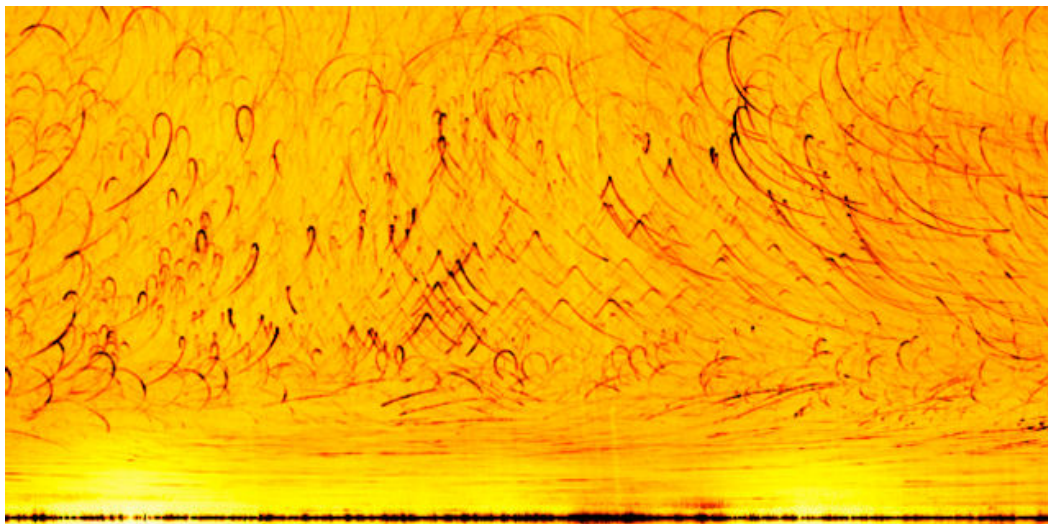


FIGURE 7.1 – Photographie à long temps de pose de grains sédimentaires entraînés par un mascaret ondulant dominé par les éteules dans le canal hydrosédimentaire de l’institut Pprime.

du mascaret et devra être confirmé expérimentalement.

Un résultat important de ce travail est que si le nombre de Froude est adapté à la description de la surface libre d’un mascaret, il n’est par contre pas adapté pour décrire le transport sédimentaire induit par celui-ci. Un autre critère devra donc être proposé afin de caractériser le transport sédimentaire. Il devra notamment intégrer la vitesse moyenne de l’écoulement après le passage du front, puisque c’est celle-ci qui gouverne la distance qu’un grain sédimentaire peut parcourir avant de se déposer sur le fond du fleuve.

Des comparaisons expérimentales avec des mesures de laboratoire et de terrain seront nécessaires à la validation des modèles présentés et des comportements observés sur les grains sédimentaires. Les résultats de laboratoires issus du projet **ANR Mascaret** permettront une première étape de validation mais semblent d’ores et déjà proches des résultats obtenus numériquement et du modèle proposé (figure 7.1). Cependant, ces comparaisons sont délicates du fait d’une part de la difficulté à récolter des données fiables dans des milieux qui ne se prêtent pas à recevoir les instruments nécessaires, et d’autre part du fait de la forte variabilité des résultats obtenus en milieu naturel. Enfin, une comparaison rigoureuse impliquerait de connaître exactement la granulométrie ainsi que les propriétés des grains sédimentaires, ce qui n’est pas réalisable en milieu naturel. C’est pourquoi ce type de comparaison est difficile et ne pourra être que qualitatif.

Malgré cela, ce travail laisse entrevoir des pistes intéressantes pour une meilleure compréhension du transport sédimentaire induit par les mascarets. L’étude théorique des ondes solitaires négatives de **Russell** pourrait ainsi apporter de nouveaux éléments prépondérants dans l’étude des mascarets. Les modèles présentés, bien

que déjà proches des observations, pourraient ainsi être améliorés et permettraient de décrire le transport de grains sédimentaires de manière plus précise dans le cas d'un mascaret ondulant. Les cas de mascarets transitoires et déferlants n'ont pas été étudiés lors de cette thèse et nécessiteraient un approfondissement. On s'attend notamment à ce que les trajectoires des grains deviennent très chaotiques près de la surface libre ce dont le modèle proposé ne peut rendre compte actuellement.

Solutions analytiques de l'évolution de la vitesse verticale d'un grain sédimentaire sphérique lâché dans un fluide au repos

[Sobral et al. \(2007\)](#) proposent des solutions analytiques pour la résolution de l'équation de [Maxey et Riley](#) dans plusieurs configurations. Il étudie quatre cas :

- un cas où le terme d'histoire est négligé et où le terme de traînée visqueuse est donné par la formule de [Stokes \(1850\)](#).
- un cas où le terme d'histoire est négligé et où le terme de traînée visqueuse est donné par la formule de [Oseen \(1927\)](#).
- un cas où le terme d'histoire n'est pas négligé et où le terme de traînée visqueuse est donné par la formule de [Stokes \(1850\)](#).
- un cas où le terme d'histoire n'est pas négligé et où le terme de traînée visqueuse est donné par la formule de [Oseen \(1927\)](#).

Le dernier cas n'étant actuellement pas soluble analytiquement, seule une solution numérique est donnée dans cet article. Afin de valider le code développé au cours de cette thèse, une solution numérique de sédimentation dans un fluide au repos est comparée à la solution analytique dans le troisième cas, c'est à dire lorsque la force d'histoire est prise en compte et que la traînée visqueuse est calculée selon la formule de [Stokes \(1850\)](#).

Dans ces conditions, l'équation à résoudre est la suivante :

$$\left(1 + \frac{1}{2}\chi\right) \frac{dv}{dt} + v + \sqrt{\frac{9\chi}{2\pi}} \int_0^t \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=\tau} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau - 1 = 0 \quad (\text{A.1})$$

où v est la vitesse verticale du grains sédimentaire (les autres composantes sont nulles) et χ est le rapport de la masse volumique du fluide par celle du grain sédimentaire. Cette équation intégral-différentielle peut-être résolue de différentes manières, notamment en utilisant des transformations de Laplace. Lors de cette résolution [Sobral et al.](#) définissent deux constantes A et B afin de simplifier les

**Annexe A. Solutions analytiques de l'évolution de la vitesse verticale
192 d'un grain sédimentaire sphérique lâché dans un fluide au repos**

notations :

$$A = 1 + \frac{\chi}{2} \quad (\text{A.2})$$

$$B = \sqrt{\frac{9\chi}{2\pi}} \quad (\text{A.3})$$

En utilisant ces notations et en appliquant une transformation de Laplace à l'équation A.1, on obtient :

$$As\tilde{v} + \tilde{v} + B(s\tilde{v})\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{s}}} - \frac{1}{s} = 0 \quad (\text{A.4})$$

qui permet d'obtenir la solution de $\tilde{v}(s)$ dans l'espace de Laplace :

$$\tilde{v}(s) = \frac{As + 1 - B\sqrt{\pi s}}{s \left[(As + 1)^2 - B^2\pi s \right]} \quad (\text{A.5})$$

La solution de $v(t)$ dans l'espace réel est obtenue par l'application d'une transformation de Laplace inverse de l'équation A.5 précédente :

$$\begin{aligned} v(t) = & 1 + C_1 (\exp(C_2 t) - \exp(C_3 t)) \\ & - \exp(C_4 t) (\cosh(C_5 t) + C_6 \sinh(C_5 t)) \\ & + C_7 \operatorname{erf}(C_8 \sqrt{t}) \exp(C_9 t) - C_{10} \operatorname{erf}(C_{11} \sqrt{t}) \exp(C_{12} t) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

où erf est la fonction erreur et les coefficients C_1 à C_{12} sont définis de la manière

suivante :

$$C_1 = \frac{A}{\sqrt{-B^2\pi(-B^2\pi + 4A)}} \quad (\text{A.7})$$

$$C_2 = -\frac{2A - B^2\pi - \sqrt{B^4\pi^2 - 4AB^2\pi}}{2A^2} \quad (\text{A.8})$$

$$C_3 = -\frac{2A - B^2\pi + \sqrt{B^4\pi^2 - 4AB^2\pi}}{2A^2} \quad (\text{A.9})$$

$$C_4 = -\frac{2A - B^2\pi}{2A^2} \quad (\text{A.10})$$

$$C_5 = \sqrt{\frac{B^4\pi^2 - 4AB^2\pi}{2A^2}} \quad (\text{A.11})$$

$$C_6 = \frac{2A - B^2\pi}{\sqrt{B^4\pi^2 - 4AB^2\pi}} \quad (\text{A.12})$$

$$C_7 = \frac{2AB\sqrt{\pi}}{\sqrt{-4A + 2B^2\pi - 2\sqrt{-4AB^2\pi + B^4\pi^2}}\sqrt{-4AB^2\pi + B^4\pi^2}} \quad (\text{A.13})$$

$$C_8 = \sqrt{\frac{-4A + 2B^2\pi - 2\sqrt{-4AB^2\pi + B^4\pi^2}}{2A}} \quad (\text{A.14})$$

$$C_9 = \frac{B^2\pi}{2A^2} - \frac{1}{A} - \frac{\sqrt{-4AB^2\pi + B^4\pi^2}}{2A^2} \quad (\text{A.15})$$

$$C_{10} = \frac{2AB\sqrt{\pi}}{\sqrt{-4A + 2B^2\pi + 2\sqrt{-4AB^2\pi + B^4\pi^2}}\sqrt{-4AB^2\pi + B^4\pi^2}} \quad (\text{A.16})$$

$$C_{11} = \sqrt{\frac{-4A + 2B^2\pi + 2\sqrt{-4AB^2\pi + B^4\pi^2}}{2A}} \quad (\text{A.17})$$

$$C_{12} = \frac{B^2\pi}{2A^2} \frac{1}{A} + \frac{\sqrt{-4AB^2\pi + B^4\pi^2}}{2A^2} \quad (\text{A.18})$$

$$(\text{A.19})$$

Solution analytique de l'évolution de la vitesse verticale d'un grain sédimentaire sphérique lâché dans un fluide en oscillation

Dans leur travaux, [van Hinsberg et al. \(2011\)](#) proposent une solution analytique pour la résolution de l'équation de [Maxey et Riley \(1983\)](#) dans un cas où l'évolution temporelle du champ de vitesse est sinusoïdale. Le champ de vitesse est donné par l'équation :

$$v(t) = \frac{(m_i - m_f)g}{6\pi r_i \mu} \cos(2t) = v_0 \cos(2t) \quad (\text{B.1})$$

où m_i est la masse du grain, m_f est la masse de fluide contenue dans un volume égal à celui du grain, g est l'accélération de pesanteur, r_i est le rayon du grain et μ est la viscosité dynamique du fluide. Comme dans le travail de [Sobral et al. \(2007\)](#), une transformation de Laplace est utilisée pour résoudre cette équation. La solution analytique est donnée pour la différence de vitesse entre le grain et le fluide environnant :

$$w = v_f - v_i \quad (\text{B.2})$$

où v_i est la vitesse verticale du grain et v_f est la vitesse verticale du fluide à la position du grain. L'équation à résoudre est donc :

$$\begin{aligned} -\left(m_i + \frac{1}{2}m_f\right) \frac{dw}{dt} &= 6\pi r_i \mu w + (m_f - m_i) \frac{dv_f}{dt} - (m_i - m_f)g \\ &+ c_B \int_0^t K_B(t - \tau) \frac{dw(\tau)}{d\tau} d\tau \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où $c_B = 6r_i^2 \rho_f \sqrt{\pi \nu}$ et $K_B(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Afin de faciliter cette transformation, le champ de vitesse est développé en série de Fourier :

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n \exp(in\omega t) = \frac{v_0}{2} (\exp(-i2t) + \exp(i2t)) \quad (\text{B.4})$$

Annexe B. Solution analytique de l'évolution de la vitesse verticale 196d'un grain sédimentaire sphérique lâché dans un fluide en oscillation

Dans ce contexte, l'application de la transformée de Laplace à l'équation de [Maxey et Riley](#) donne :

$$-\left(m_i + \frac{1}{2}m_f + c_b\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right)(s\tilde{w} - w(0)) = 6\pi r_i \mu \tilde{w} - \frac{m_i - m_f}{s}g + (m_f - m_i) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \frac{in\omega}{s - in\omega} \quad (\text{B.5})$$

La résolution de cette équation permet de trouver la solution de $\tilde{w}(s)$:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(s) = & \frac{c}{\sqrt{s}} \left(\frac{c_+}{\sqrt{s} + c_-} - \frac{c_-}{\sqrt{s} + c_+} \right) \left(w(0) - \frac{m_i - m_f}{6\pi r_i \mu} g \right) + \frac{m_i - m_f}{6\pi r_i \mu} \frac{g}{s} \\ & + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left[\frac{1}{(c_+ + \sqrt{in\omega})(c_- + \sqrt{in\omega})(s - in\omega)} \right. \\ & + \frac{\sqrt{in\omega}(c_+ + c_-)}{(c_+^2 - in\omega)(c_-^2 - in\omega)\sqrt{s}(\sqrt{s} + \sqrt{in\omega})} \\ & \left. + \frac{c}{\sqrt{s}} \left(\frac{c_+}{(c_+^2 - in\omega)(\sqrt{s} + c_+)} - \frac{c_-}{(c_-^2 - in\omega)(\sqrt{s} + c_-)} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

où les coefficients c , c_+ , c_- et c_n sont donnés par les équations :

$$c = \frac{2m_i + m_f}{2\sqrt{c_B^2\pi - 12\pi r_i \mu (2m_i + m_f)}} \quad (\text{B.7})$$

$$c_{\pm} = \frac{c_B\sqrt{\pi} \pm \sqrt{c_B^2\pi - 12\pi r_i \mu (2m_i + m_f)}}{2m_i + m_f} \quad (\text{B.8})$$

$$c_n = \frac{in\omega(m_i - m_f)v_n}{m_i + \frac{1}{2}m_f} \quad (\text{B.9})$$

L'application d'une transformation de Laplace inverse permet d'obtenir la solution dans l'espace réel :

$$\begin{aligned} w(t) = & c \left[c_+\psi(c_-\sqrt{t}) - c_-\psi(c_+\sqrt{t}) \right] \left(w(0) - \frac{m_i - m_f}{6\pi r_i \mu} g \right) + \frac{m_i - m_f}{6\pi r_i \mu} g \\ & + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left[\frac{1}{(c_+ + \sqrt{in\omega})(c_- + \sqrt{in\omega})} \exp(in\omega t) \right. \\ & + \frac{\sqrt{in\omega}(c_+ + c_-)}{(c_+^2 - in\omega)(c_-^2 - in\omega)} \psi(\sqrt{in\omega t}) \\ & \left. + \frac{cc_+}{c_+^2 - in\omega} \psi(c_+\sqrt{t}) - \frac{cc_-}{c_-^2 - in\omega} \psi(c_-\sqrt{t}) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Opérations sur les moments

C.1 Transformation géométrique des moments

Lors de l'évolution d'un nuage de grains dans un écoulement, deux caractéristiques du nuage évoluent : d'une part le support géométrique dans lequel tous les grains du nuage sont contenus, et d'autre part la distribution de grains à l'intérieur de ce support. Dans certaines situations, il est nécessaire de déterminer les moments dans un référentiel particulier connu, notamment lorsque des polynômes de Legendre sont utilisés car ils ne sont orthogonaux que dans l'intervalle $[-1; 1]$ (schéma de transformation d'un nuage à distribution gaussienne en figure C.1). Dans ce cas, connaissant la transformation géométrique F définie comme :

$$F(x,y) = \begin{cases} \hat{x} = \sum_{i=0}^N (a_i x^i + b_i y^i) \\ \hat{y} = \sum_{i=0}^N (c_i x^i + d_i y^i) \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

où \hat{x} et \hat{y} sont les coordonnées résultant de la transformation géométrique et a_i, b_i, c_i et d_i sont les coefficients de cette transformation que l'on suppose ici connus. On définit le jacobien de cette transformation comme le déterminant de la matrice jacobienne :

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} \implies J = \det(\bar{J}) = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \quad (\text{C.2})$$

On peut maintenant appliquer la transformation géométrique à l'équation 4.1 définissant les moments (afin de simplifier les écritures, nous nous réduisons au cas bidimensionnel) :

$$\hat{M}_{x^m y^n} = \int_{\hat{\sigma}} C(\hat{x}, \hat{y}) \hat{x}^m \hat{y}^n d\hat{x} d\hat{y} \quad (\text{C.3})$$

$$= J \int_{\sigma} C(x, y) \left(\sum_{i=0}^N (a_i x^i + b_i y^i) \right)^m \left(\sum_{i=0}^N (c_i x^i + d_i y^i) \right)^n dx dy \quad (\text{C.4})$$

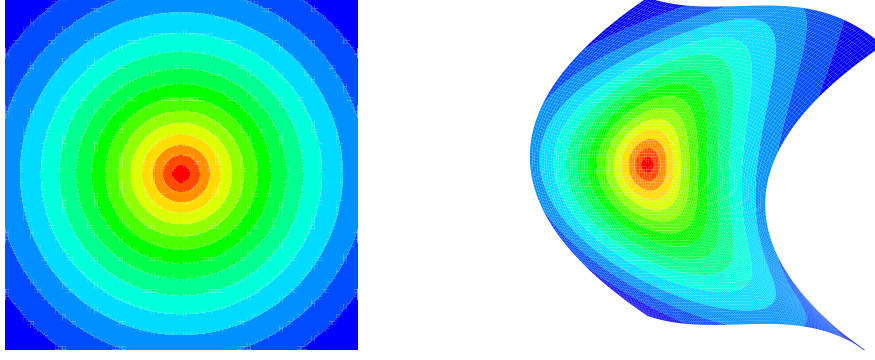


FIGURE C.1 – Connaissant les moments du nuage dans le référentiel non déformé (à gauche), on souhaite déterminer les moments de ce nuage dans le référentiel déformé (à droite).

Si l'on se place dans le cas le plus simple d'une transformation d'ordre 1, on a alors :

$$\begin{aligned}
 F(x,y) &= \begin{cases} \hat{x} = ax + by + A \\ \hat{y} = cx + dy + B \end{cases} \\
 J &= \det(\bar{J}) = a \times d - b \times c \\
 \hat{M}_{x^m y^n} &= J \int_{\sigma} C(x,y) (ax + by + A)^m (cx + dy + B)^n dx dy \\
 &= J \int_{\sigma} C(x,y) \times \sum_{i_1, j_1, k_1}^{i_1 + j_1 + k_1 = m} \alpha_n^{i_1, j_1, k_1} a x_1^i b y_1^j A_1^k \\
 &\quad \times \sum_{i_2, j_2, k_2}^{i_2 + j_2 + k_2 = n} \beta_m^{i_2, j_2, k_2} c x_2^i d y_2^j B_2^k dx dy
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

avec $\alpha_n^{i,j,k} = \frac{n!}{i!j!k!}$.

Dans l'expression C.5, chaque terme issu du produit des sommes donnera un terme de la forme $\gamma x^{i_1+i_2} \delta y^{j_1+j_2}$ où γ et δ sont des coefficients issus des produits. Ainsi, on retrouve l'expression d'un moment d'ordre $(i_1 + i_2; j_1 + j_2)$ dont l'ordre global N ne dépasse pas l'ordre global des moments connus avant la transformation, il n'y a donc pas de problème de fermeture de ce problème.

Par exemple, la transformation des moments d'ordre global $n \leq 2$ donne :

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_{00} &= J M_{00} \\
 \hat{M}_x &= J(a M_x + b M_y) \\
 \hat{M}_{x^2} &= J(2ab M_{xy} + a^2 M_{x^2} + b^2 M_{y^2}) \\
 \hat{M}_{y^2} &= J(2cd M_{xy} + c^2 M_{x^2} + d^2 M_{y^2}) \\
 \hat{M}_{xy} &= J(ac M_{x^2} + bd M_{y^2} + (ad + bc) M_{xy})
 \end{aligned}$$

C.2 Transport des moments d'un point à un autre

Les moments d'une distribution de grains dans un nuage sont calculés par rapport à un point arbitraire qui est le plus souvent le centre de masse du nuage. Cependant, dans certaines situations, il peut être nécessaire de pouvoir calculer les moments d'un nuage de grains par rapport à un autre point. C'est notamment le cas lorsqu'un nuage est divisé en deux particules numériques distinctes afin d'augmenter la précision du calcul. Dans ce cas, les moments des deux nouvelles particules sont déterminés par rapport à leurs centres respectifs alors que le résultat recherché est l'ensemble des moments du nuage par rapport à son propre centre, il faut donc transporter les moments des centres des particules numériques vers le centre du nuage. Pour cela, nous appliquons le théorème de Huygens adapté aux moments utilisés et généralisé à un ordre quelconque. Nous définissons d'une part le point G comme le point initial par rapport auquel les moments sont connus et d'autre part le point P comme le point vers lequel les moments sont transportés (voir figure C.2).

$$M_{x^m y^m z^o / G} = \int_{\sigma_i} C(x, y, z) (x - x_G)^m (y - y_G)^n (z - z_G)^o dx dy dz \quad (C.6)$$

$$\begin{aligned} M_{x^m y^m z^o / P} &= \int_{\sigma_i} C(x, y, z) (x - x_P)^m (y - y_P)^n (z - z_P)^o dx dy dz \\ &= \int_{\sigma_i} C(x, y, z) [x - (x_G + x_P - x_G)]^m [y - (y_G + y_P - y_G)]^n \\ &\quad [(z - (z_G + z_P - z_G))]^o dx dy dz \\ &= \int_{\sigma_i} C(x, y, z) [x - (x_G + \Delta x)]^m [y - (y_G + \Delta y)]^n \\ &\quad [(z - (z_G + \Delta z))]^o dx dy dz \\ &= \int_{\sigma_i} C(x, y, z) \sum_{a=0}^m \frac{m!}{a!(m-a)!} (x - x_G)^a \Delta x^{m-a} \\ &\quad \sum_{b=0}^n \frac{n!}{b!(n-b)!} (y - y_G)^b \Delta y^{n-b} \sum_{c=0}^o \frac{o!}{c!(o-c)!} (z - z_G)^c \Delta z^{o-c} dx dy dz \\ &= \int_{\sigma_i} C(x, y, z) \sum_{a=0}^m \sum_{b=0}^n \sum_{c=0}^o \frac{m!n!o! \Delta x^{m-a} \Delta y^{n-b} \Delta z^{o-c}}{a!b!c!(m-a)!(n-b)!(o-c)!} \\ &\quad (x - x_G)^a (y - y_G)^b (z - z_G)^c dx dy dz \\ &= \sum_{a=0}^m \sum_{b=0}^n \sum_{c=0}^o \frac{m!n!o! \Delta x^{m-a} \Delta y^{n-b} \Delta z^{o-c}}{a!b!c!(m-a)!(n-b)!(o-c)!} M_{x^a y^b z^c / G} \end{aligned} \quad (C.7)$$

où $M_{x^m y^m z^o / G}$ est le moment initial par rapport au point G et $M_{x^m y^m z^o / P}$ est le moment transporté par rapport au point P .

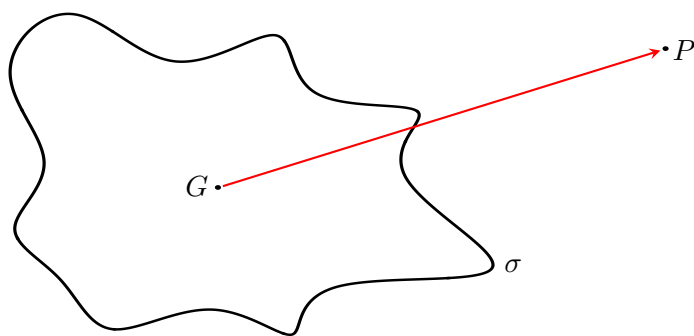


FIGURE C.2 – Connaissant les moments du nuage σ par rapport au point G , on souhaite déterminer les moments de ce nuage par rapport au point P .

Modélisation des trajectoires des particules fluides dans le cadre d'une interaction onde-courant

Chen *et al.* (2012a) propose une solution analytique au problème du calcul de la trajectoire lagrangienne d'une particule fluide dans le cadre d'une interaction onde-courant. Pour cela, ils considèrent une onde monochromatique se propageant sur un courant stationnaire uniforme sur un fond imperméable horizontal. Le mouvement du fluide est considéré comme bidimensionnel et irrotationnel et l'onde se propage de la gauche vers la droite (figure D.1).

Les auteurs proposent de poser le problème en terme de variables lagrangiennes a et b qui définissent la position originale de la particule fluide. Pour tout t , la position $b = 0$ correspond à la surface libre et $b = d$ est le fond du canal. Les inconnues du problème sont les positions cartésiennes des particules fluides $(x(a; b; t); y(a; b; t))$ et la pression du fluide $p(a; b; t)$. Ainsi, le problème est décrit par le système :

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} = 1, \quad (\text{D.1a})$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = x_{at}y_b + x_a y_{bt} - x_{bt}y_a - x_b y_{at} = 0, \quad (\text{D.1b})$$

$$x_{at}x_b - x_a x_{bt} + y_{at}y_b - y_a y_{bt} = 0, \quad (\text{D.1c})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = x_t x_a + y_t y_a, \quad \frac{\partial \phi}{\partial b} = x_t x_b + y_t y_b, \quad (\text{D.1d})$$

$$\frac{P}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - gy + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (\text{D.1e})$$

$$p = 0, \quad b = 0. \quad (\text{D.1f})$$

$$v = y_t = 0, \quad y = b = -d. \quad (\text{D.1g})$$

où les indices a , b et t représentent les dérivées partielles selon ces variables, U est la vitesse du courant stationnaire uniforme, g est l'accélération de pesanteur, $p(a; b; t)$ est la pression du fluide et $\phi(a; b; t)$ est la fonction potentiel de vitesse en représentation lagrangienne.

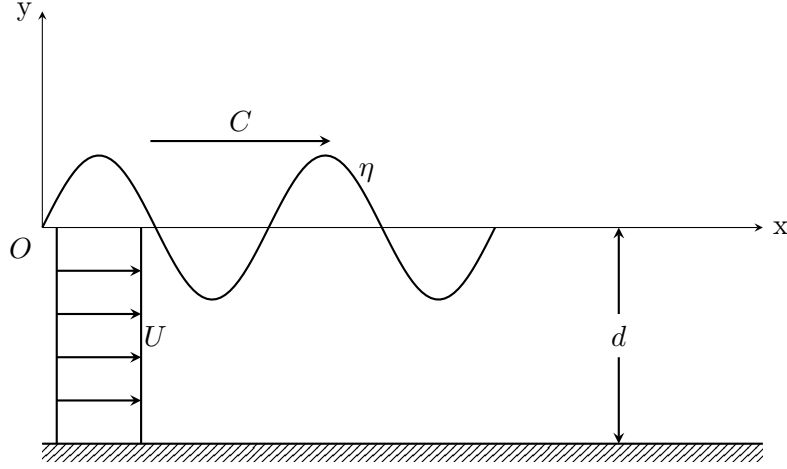


FIGURE D.1 – Schéma montrant le système de train d'ondes progressives se propageant sur un courant uniforme.

Une fréquence angulaire lagrangienne du mouvement des particules fluides σ est introduite afin d'éviter l'apparition d'un terme séculaire. Le système est ensuite résolu grâce à la théorie des perturbations en introduisant un terme ε permettant d'identifier l'ordre du terme associé :

$$x = a + Ut + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n [f_n(a, b, \sigma t) + f'_n(a, b, \sigma_0 t)] , \quad (\text{D.2a})$$

$$y = b + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n [g_n(a, b, \sigma t) + g'_n(a, b, \sigma_0 t)] , \quad (\text{D.2b})$$

$$\phi = Ua + \frac{1}{2}U^2t + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n [\phi_n(a, b, \sigma t) + \phi'_n(a, b, \sigma_0 t)] , \quad (\text{D.2c})$$

$$p = -\rho gb + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n p_n(a, b, \sigma t) , \quad (\text{D.2d})$$

$$\sigma = \sigma_0 ab + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_n(a, b) = \frac{2}{\pi} T_L \quad (\text{D.2e})$$

où les variables lagrangiennes $(a; b)$ sont les deux paramètres caractéristiques. Dans ces expressions, f_n , g_n , ϕ_n et p_n sont supposés associés à l'harmonique d'ordre n . f'_n , g'_n , ϕ'_n et p'_n sont des fonctions non périodiques qui augmentent linéairement en temps. $\sigma = 2\pi/T_L$ est la fréquence angulaire du mouvement des particules fluides, c'est-à-dire la fréquence angulaire lagrangienne à laquelle les particules reviennent à la même hauteur. T_L est la période correspondant à cette fréquence angulaire. En introduisant les équations D.2 dans le système D.1, [Chen et al.](#) obtiennent une série d'équations différentielles non-homogènes pouvant être résolues successivement dont les détails de résolution ne sont pas donnés ici.

La solution du système présenté pour les variables x , y et σ jusqu'au troisième

ordre est alors :

- au premier ordre :

$$f_1 = -\alpha \frac{\cosh(k(b+d))}{\cosh(kd)} \sin(ka - \sigma t), \quad (\text{D.3a})$$

$$g_1 = \alpha \frac{\sinh(k(b+d))}{\cosh(kd)} \cos(ka - \sigma t), \quad (\text{D.3b})$$

$$f'_1 = g'_1 = 0 \quad (\text{D.3c})$$

$$\sigma_0 = gk \tanh(kd), \quad (\text{D.3d})$$

$$(\text{D.3e})$$

où le paramètre α représente la fonction d'amplitude du déplacement des particules fluides et l'amplitude de l'onde est $a_0 = \alpha \tanh(kd)$ où $k = 2\pi/L$ est le nombre d'onde avec L la longueur d'onde.

- au second ordre :

$$\begin{aligned} f_2 = & -\frac{3}{8}\alpha^2 k \left(\tanh^{-2}(kd) - \tanh^2(kd) \right) \frac{\cosh(2k(b+d))}{\cosh(2kd)} \sin(2ka - 2\sigma t) \\ & + \frac{1}{4}\alpha^2 k \left(1 - \tanh^2(kd) \right) \sin(2ka - 2\sigma t), \end{aligned} \quad (\text{D.4a})$$

$$f'_2 = \frac{1}{2}\alpha^2 k \left(1 + \tanh^2(kd) \right) \frac{\cosh(2k(b+d))}{\cosh(2kd)} \sigma_0 t, \quad (\text{D.4b})$$

$$\begin{aligned} g_2 = & \frac{3}{8}\alpha^2 k \left(\tanh^{-2}(kd) - \tanh^2(kd) \right) \frac{\sinh(2k(b+d))}{\cosh(2kd)} \cos(2ka - 2\sigma t) \\ & + \frac{1}{4}\alpha^2 k \left(1 + \tanh^2(kd) \right) \frac{\sinh(2k(b+d))}{\cosh(2kd)}, \end{aligned} \quad (\text{D.4c})$$

$$g'_2 = \sigma_1 = 0 \quad (\text{D.4d})$$

• au troisième ordre :

$$f_3 = \left[-\beta_3 \frac{\cosh(3k(b+d))}{\cosh^3(kd)} + \frac{1}{6} \alpha k \left(5\beta_2 - \frac{1}{2} \alpha^2 k \right) \frac{\cosh(k(b+d))}{\cosh^3(kd)} \right] \sin(3ka - 3\sigma t) \\ - \left[\frac{1}{2} \alpha k \left(5\beta_2 + \alpha^2 k \right) \frac{\cosh(3k(b+d))}{\cosh^3(kd)} + \lambda_3 \frac{\cosh(k(b+d))}{\cosh^3(kd)} \right] \sin(ka - \sigma t), \quad (\text{D.5a})$$

$$g_3 = \left[\beta_3 \frac{\sinh(3k(b+d))}{\cosh^3(kd)} - \frac{1}{2} \alpha k \beta_2 \frac{\sinh(k(b+d))}{\cosh^3(kd)} \right] \cos(3ka - 3\sigma t) \\ - \left[\frac{1}{2} \alpha k \left(3\beta_2 + \frac{1}{2} \alpha^2 k \right) \frac{\sinh(3k(b+d))}{\cosh^3(kd)} + \lambda_3 \frac{\sinh(k(b+d))}{\cosh^3(kd)} \right] \cos(ka - \sigma t), \quad (\text{D.5b})$$

$$f'_3 = g'_3 = 0 \quad (\text{D.5c})$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2} \alpha^2 k^2 \sigma_0 \frac{\cosh(2k(b+d))}{\cosh^2(kd)} \\ + \frac{1}{16} \alpha^2 k^2 \left(9 \tanh^{-2}(kd) - 10 + 9 \tanh^2(kd) \right) \sigma_0 \quad (\text{D.5d})$$

où

$$\beta_2 = \frac{3}{8} \alpha^2 k \left(\tanh^{-2}(kd) - 1 \right) \quad (\text{D.6})$$

$$\beta_3 = \frac{1}{64} \alpha^3 k^2 (9 \tanh^{-4}(kd) - 22 \tanh^{-2}(kd) + 13) \quad (\text{D.7})$$

Ces équations sont utilisées pour modéliser les trajectoires des grains sédimentaires dans les éteules des mascarets. Une enveloppe doit cependant être ajoutée afin de représenter la décroissance de l'amplitude des éteules. Dans ce travail, une simple fonction exponentielle décroissante a été choisie.

Liste des tableaux

1.1	Classification de Wentworth (1922)	30
2.1	Erreurs relative de la vitesse d'un grain évoluant dans un champ oscillant, calculée lorsque $t = 2\pi$	53
4.1	Schématisation des formes des particules numériques employées par différents auteurs.	83
4.2	Comparaison des temps de calcul de la méthode des moments. . . .	103
6.1	Paramètres utilisés pour la décomposition des trajectoires.	157
6.2	Vitesses d'advection des sédiments associées aux trois types de droites présentes sur les figures 6.30, 6.32, 6.34, 6.36, 6.38 et 6.40.	176

Liste des figures

1.1	Amplitude moyenne des marées dans le monde (FES2004)	17
1.2	Mascaret sur la Gironde, de type ondulant, à Langoiran en France (Jacques Bedex).	18
1.3	Mascaret sur le Qiantang, de type déferlant, en Chine (Reuters/Stringer).	19
1.4	Schémas des ressauts hydrauliques apparentés au mascaret et définition des grandeurs associées.	21
1.5	Familles de ressauts hydrauliques stationnaires (Peterka, 1957).	22
1.6	Schémas de mascarets ondulant, transitoire et déferlant.	23
1.7	Schémas des ressauts hydrauliques de type réflexion sur une paroi, générés par la fermeture complète ou partielle d'une porte.	25
1.8	Asymétrie des marées fluviales en quatre positions : proche de l'embouchure (courbe CHF) et de plus en plus en amont de celle-ci (courbes $C'H'F'$, $C''H''F''$ et $C'''F'''H'''$ respectivement). Cette figure est une copie de la figure 23 de Comoy (1881)	27
1.9	Photographies d'échantillons de sédiments de différentes classes allant des granules au sable très fin.	31
1.10	Modes de transport des grains sédimentaires.	32
1.11	Diagramme modifié de Sundborg-Hjulström (Miedema, 2010).	33
1.12	Coupe de dépôts successifs de tange sur une berge du fleuve Sée se jetant dans la baie du Mont Saint-Michel.	35
1.13	Courbe granulométrique d'un échantillon issue du site de mesure du projet Mascaret dans la baie du Mont Saint-Michel (Furgerot, 2014).	35
2.1	Schéma du fluide entraîné (en rouge) par un objet sphérique (en noir) donnant lieu à la masse ajoutée.	42
2.2	Évolution des différentes expressions du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds particulière.	46
2.3	Évolution de la vitesse verticale adimensionnée par la vitesse de sédimentation de Stokes en fonction du temps adimensionné par le temps de relaxation τ_r d'un grain sphérique soumis à la force hydrodynamique dite linéaire avec et sans le terme d'histoire, pour $\chi = 0,5$	52
2.4	Évolution de la vitesse verticale adimensionnée par la vitesse de sédimentation de Stokes en fonction du temps adimensionné par le temps de relaxation τ_r d'un grain sphérique soumis à différentes combinaisons de termes composant la force hydrodynamique.	55
2.5	Évolution de la vitesse verticale adimensionnée par la vitesse de sédimentation de Stokes en fonction du temps adimensionné par le temps de relaxation τ_r d'un grain sphérique soumis à différentes combinaisons de termes composant la force hydrodynamique.	56

2.6	Évolution de l'écart moyen selon x entre deux configurations pour différentes valeurs de la masse volumique.	57
2.7	Évolution de l'écart moyen selon y entre deux configurations pour différentes valeurs de la masse volumique.	58
2.8	Évolution de l'écart moyen selon z entre deux configurations pour différentes valeurs de la masse volumique.	58
3.1	Exemple de reconstruction d'une fonction à partir de particules numériques.	65
3.2	Noyau de régularisation $M4'$	66
3.3	Illustration de la mise en place du <i>treecode</i>	70
3.4	Schéma de projection d'une particule fantôme en x_{G_i} à partir d'une particule numérique située en x_i par rapport à une paroi située sur l'axe t	73
3.5	Schéma de positionnement des particules fantômes au niveau des frontières droites et des coins.	74
3.6	Résultats de concentration et de gradient de concentration déterminés grâce à la méthode particulière proche de parois imperméables. .	74
3.7	Champs de concentration numérique et analytique initiaux.	77
3.8	Champs de concentration numérique et analytique finaux à $t = 0,25$ s. .	77
3.9	Évolution de l'erreur de norme L_2 de la solution numérique par rapport à la solution analytique de la diffusion.	78
4.1	Définition des repères local R' et global R d'un nuage de grains elliptique.	84
4.2	Évolution des moments normalisés par leur valeur initiale d'un nuage de grains dans un écoulement de type cisaillement pur. Les traits pleins sont les résultats de la simulation et les tiretés sont les solutions analytiques.	86
4.3	Écoulement de Poiseuille.	87
4.4	Évolution du moment M_{x^2} normalisé par sa valeur initiale pour quatre nuages de diamètres ϕ différents injectés au centre d'un écoulement de Poiseuille, calculées à partir de la méthode particulière (tiretés) et la méthode des moments utilisant un développement de Taylor à l'ordre 1 (traits pleins).	88
4.5	Résultat issu de la méthode des moments (en rouge) comparé à celui issu de la méthode particulière de référence à $t = 0$ s et $t = 9,5$ s lorsqu'un développement de Taylor à l'ordre 1 est utilisé. Dans ce cas, la méthode des moments ne permet aucune évolution.	88
4.6	Champs de vitesse (flèches) et de vorticité (fond coloré) générés par le code Incompact3d.	89

4.7	Évolution des moments d'ordre 2 d'un nuage de grains dans un jet pulsé, calculés avec la méthode des moments (moments avec un exposant *) et la méthode particulaire (moments avec un exposant ^{Ref}).	90
4.8	Comparaison de la méthode particulaire (carrés noirs) et de la transformation du référentiel (tireté rouge) à $t = 0s$ et $t = 9,5s$.	92
4.9	Évolution du moment M_{x^2} normalisé par sa valeur initiale pour quatre nuages de diamètres ϕ différents injectés au centre d'un écoulement de Poiseuille, calculé à partir de la méthode particulaire (tiretés) et la méthode des moments utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2 (traits pleins).	93
4.10	Évolution des moments d'ordre 2 d'un nuage de grains dans un jet pulsé, calculés avec la méthode des moments utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2 (moments avec un exposant *) et la méthode particulaire (moments avec un exposant *).	94
4.11	Évolution du moment M_{xy} d'un nuage de grains dans un jet pulsé, calculé avec la méthode des moments utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2 (moments avec un exposant *) et la méthode particulaire (moments avec un exposant ^{Ref}).	95
4.12	Exemple de division d'une particule mère circulaire (à gauche, en rouge) et d'une particule mère elliptique (à droite, en rouge) en particules filles (en bleu).	97
4.13	Évolution du moment M_{x^2} normalisé par sa valeur initiale pour quatre nuages de tailles différentes injectés au centre d'un écoulement de Poiseuille, calculé à partir de la méthode particulaire (tiretés) et la méthode des moments en divisant les particules numériques avec $\varepsilon = 0,55$ (traits pleins).	100
4.14	Répartition des particules numériques après 2 divisions successives d'un cercle (à gauche) puis après 4 divisions (à droite). Les moments d'ordres globaux inférieurs ou égaux à 2 sont identiques à ceux du cercle initial (rouge).	100
4.15	Évolution des moments d'ordre 2 d'un nuage de grains dans un jet pulsé, calculés avec la méthode des moments avec (moments avec un exposant **) et sans division (moments avec un exposant *) avec la méthode particulaire (moments avec un exposant ^{Ref}).	102
4.16	Exemple de nuage de grains de support carré et de distribution gaussienne.	104
4.17	Reconstruction d'une distribution gaussienne à partir de ses moments pour différents ordres de coupure (a à e), comparés à la solution analytique (f).	109
4.18	Évolution de l'erreur relative globale en fonction de l'ordre de coupure.	110
4.19	Évolution de l'erreur de norme L_2 en fonction du paramètre γ contrôlant l'amplitude du bruit appliqué aux moments.	110

4.20	Reconstruction d'une distribution gaussienne à partir de ses moments en leur appliquant des bruits aléatoires d'amplitudes différentes. . .	111
4.21	Exemple de nuage de grains de support carré et de distribution gaussienne dont l'évolution par diffusion a été calculée par la méthode des moments (a) et comparée à la solution analytique (b) pour un ordre de coupure $N = 20$	114
4.22	Évolution de l'erreur de norme L_2 en fonction de la distance au centre de la distribution gaussienne jusqu'à laquelle l'erreur est calculée. . .	115
4.23	Évolution de l'erreur relative en fonction de la distance au centre de la distribution gaussienne pour différents ordres de coupure.	115
4.24	Exemple de nuage de grains de support carré et de distribution gaussienne dont les évolutions par convection (a) et par advection-diffusion (b) ont été calculées par la méthode des moments. L'advection n'introduit que peu d'erreur, même lorsque la diffusion est prise en compte.	115
5.1	Schéma du dispositif expérimental.	120
5.2	Schéma du dispositif de mesure (Berchet <i>et al.</i> , 2013).	120
5.3	Résultat expérimental final.	122
5.4	Résultat numérique final sans aucune correction.	122
5.5	Mise en évidence de la corrélation entre les îlots de variation anormale de la concentration et la divergence.	123
5.6	Schématisation de l'effet d'une divergence négative (rouge : positions initiales des particules numériques; bleu : positions des particules perturbées par la divergence).	123
5.7	Application de la correction de flux de masse au champ de concentration initial.	125
5.8	Vue du plan médian à $t = 7,5$ s pour une correction du flux de masse avec deux pas de temps différents.	126
5.10	Champ analytique défini par le système 5.10 avec 40 lignes de courant. La divergence est représentée par l'échelle de couleurs.	130
5.11	Évolution des moments d'un nuage de grain ainsi que de sa surfaces dans un écoulement divergent.	130
5.12	Évolution des moments d'un nuage de grain ainsi que de sa surfaces dans un écoulement divergent.	132
6.1	Champ de vitesse adimensionné au sein du milieu poreux généré par le code de calcul PARADIS (Beaudoin <i>et al.</i> , 2013) pour une variance $\sigma^2 = 1$	138
6.2	Évolution des moments d'un nuage de grains sédimentaires évoluant dans un milieux poreux.	139
6.3	Évolution de la vitesse de dispersion convergeant vers la solution analytique.	140

6.4	Représentation des deux écoulements étudiés lorsque le front du ressaut se trouve en $x = 2,5$ m.	142
6.5	Agrandissement de la zone proche du fond sous la crête de front lorsque le front du ressaut se trouve en $x = 2,5$ m.	143
6.6	Viscosité turbulente déterminée par le code <i>Thétis</i> (Simon, 2013) dans le cas du ressaut dominé par les éteules (cas A), 3,1 s après la fermeture de la porte et 0,98 s après l'injection des grains sédimentaires.	144
6.7	Viscosité turbulente déterminée par le code <i>Thétis</i> (Simon, 2013) dans le cas du ressaut dominé par le courant (cas B), 6,1 s après la fermeture de la porte et 1,25 s après l'injection des grains sédimentaires.	145
6.8	Trajectoires des centres de masses des nuages de grains sédimentaires dans les deux cas A et B.	146
6.9	Moments et élévation des nuages de grains sédimentaires au cours du temps.	147
6.10	Trajectoires des grains sédimentaires lors du passage du ressaut pour différentes hauteurs d'injection et différentes masses volumiques.	148
6.11	Trajectoires des grains sédimentaires dans la partie supérieure de l'écoulement ($h \geq 5$ cm) lors du passage du ressaut pour différentes masses volumiques.	150
6.12	Trajectoires des grains sédimentaires dans la partie inférieure de l'écoulement ($h \leq 5$ cm) lors du passage du ressaut pour différentes masses volumiques.	151
6.13	Différents types de trajectoires de particules fluides dans un écoulement de type interaction onde-courant (Chen <i>et al.</i> , 2010, 2012a,b; Chen et Chen, 2014; Hsu, 2013).	153
6.14	Caractéristiques des trajectoires rencontrées dans les deux cas étudiés.	154
6.15	Comparaison de la trajectoire complète à la trajectoire dont la contribution de la gravité a été retirée (cas A).	155
6.16	Comparaison de la trajectoire sans gravité à la trajectoire dont les contributions de la gravité, de la surélévation et du ralentissement ont été retirées (cas A).	156
6.17	Comparaison de la trajectoire sans gravité dans la partie suivant le passage du front du ressaut à la trajectoire issue du modèle d'interaction onde-courant avec atténuation (cas A).	157
6.18	Comparaison de la trajectoire complète à la trajectoire dont la contribution de la gravité a été retirée (cas B).	158
6.19	Comparaison de la trajectoire sans gravité à la trajectoire dont les contributions de la gravité, de la surélévation et du ralentissement ont été retirées (cas B).	158
6.20	Comparaison de la trajectoire sans gravité dans la partie suivant le passage du front du ressaut à la trajectoire issue du modèle d'interaction onde-courant avec atténuation (cas B).	159

6.21	Évolution des vitesses horizontales du fluide proche du fond pour les deux cas étudiés : lorsque la porte est entièrement fermée (cas A) et lorsqu'elle ne l'est que partiellement (cas B).	160
6.22	Positions d'injection des nappes : nappe 1 en $0 \leq y \leq 0,01$ m, nappe 2 en $0,02 \leq y \leq 0,03$ m et nappe 3 en $0,1 \leq y \leq 0,11$ m avec $2 \leq x \leq 6$ m.	161
6.23	Cas A : vue globale des différentes nappes injectées lorsque le front est en $x = 3,7$ m. La position du soulèvement initial maximum des sédiments est mis en évidence par la ligne pointillée dont le coefficient directeur est égal à -4	161
6.24	Cas B : vue globale des différentes nappes injectées lorsque le front est en $x = 3,7$ m. La position du soulèvement initial maximum des sédiments est mis en évidence par la ligne pointillée dont le coefficient directeur est égal à $-1,5$	162
6.25	Observations expérimentales réalisée dans le cadre de l'ANR par l'équipe M2C : apparition de structures sédimentaires proche du fond.	162
6.26	Schéma de l'effet de l'orientation d'une nappe sur les valeurs de \overline{C}_v .	164
6.27	Effet de l'ondulation d'une nappe sur les valeurs de \overline{C}_h et de \overline{C}_v . . .	165
6.28	Effet d'une structure tourbillonnaire sur les valeurs de \overline{C}_v	166
6.29	Délimitations des différentes zones de transport sédimentaire dans les deux cas A et B à deux instants différents.	168
6.30	Cas A : intégration de la concentration selon la verticale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 0$ cm et $y = 1$ cm. . . .	169
6.31	Cas A : intégration de la concentration selon l'horizontale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 0$ cm et $y = 1$ cm. . . .	169
6.32	Cas A : intégration de la concentration selon la verticale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 2$ cm et $y = 3$ cm. . . .	170
6.33	Cas A : intégration de la concentration selon l'horizontale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 2$ cm et $y = 3$ cm. . . .	170
6.34	Cas A : intégration de la concentration selon la verticale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 10$ cm et $y = 11$ cm. . .	171
6.35	Cas A : intégration de la concentration selon l'horizontale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 10$ cm et $y = 11$ cm. . .	171
6.36	Cas B : intégration de la concentration selon la verticale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 0$ cm et $y = 1$ cm. . . .	172
6.37	Cas B : intégration de la concentration selon l'horizontale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 0$ cm et $y = 1$ cm. . . .	172
6.38	Cas B : intégration de la concentration selon la verticale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 2$ cm et $y = 3$ cm. . . .	173
6.39	Cas B : intégration de la concentration selon l'horizontale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 2$ cm et $y = 3$ cm. . . .	173
6.40	Cas B : intégration de la concentration selon la verticale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 10$ cm et $y = 11$ cm. . .	174

6.41	Cas B : intégration de la concentration selon l'horizontale à chaque instant : nappe située initialement entre $y = 10$ cm et $y = 11$ cm. . .	174
6.42	Évolution des moments M_{x^2} , M_{xy} et M_{y^2} dans les cas A et B pour des nuages de grains de 1 cm de diamètre injectés à $h = 0,1$ m. . . .	179
6.43	Écoulement de rupture de barrage utilisé pour la modélisation de la surélévation au niveau du front du ressaut.	180
6.44	Écoulement de soliton utilisé pour la modélisation des éteules. . . .	180
6.45	Évolution des moments d'ordre 2 dans le cas de la rupture de barrage (cas C).	181
6.46	Évolution du nuage de grains sédimentaires dans le cas de la rupture de barrage (cas C).	182
6.47	Évolution des moments d'ordre 2 dans le cas du soliton (cas D). . . .	182
6.48	Évolution du nuage de grains sédimentaires dans le cas du soliton (cas D).	183
6.49	Évolution des moments M_{x^2} , M_{xy} et M_{y^2} dans les cas A et B et zones de modélisation par une surélévation de type rupture de barrage et par des oscillations de type soliton.	183
6.50	Forme de l'onde négative décrite par Russell et trajectoires associées des grains sédimentaires. Cette figure est une copie de la figure 9 de Russell (1845)	185
7.1	Photographie à long temps de pose de grains sédimentaires entraînés par un mascaret ondulant dominé par les éteules dans le canal hydrosédimentaire de l'institut Pprime.	189
C.1	Connaissant les moments du nuage dans le référentiel non déformé (à gauche), on souhaite déterminer les moments de ce nuage dans le référentiel déformé (à droite).	198
C.2	Connaissant les moments du nuage σ par rapport au point G , on souhaite déterminer les moments de ce nuage par rapport au point P . 200	
D.1	Schéma montrant le système de train d'ondes progressives se propageant sur un courant uniforme.	202

Bibliographie

- P. Allen et D.J. Tildesley : *Computer Simulation of Liquids*. Oxford Science Publ. Clarendon Press, 1989. ISBN 9780198556459. (Cité en page 36.)
- ANR Mascaret : <http://mascaret.enscbp.fr>. (Cité en pages 15, 51, 54, 60, 78, 141, 145, 159 et 189.)
- V. Armenio et V. Fiorotto : The importance of the forces acting on particles in turbulent flows. *Physics of Fluids*, 13(8):2437–2440, 2001. (Cité en page 55.)
- T.R. Auton, J.C.R. Hunts et M. Prud’Homme : The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 197:241–257, 1988. (Cité en pages 42 et 47.)
- N. Barbry, S. Guillou et K.D. Nguyen : Une approche diphasique pour le calcul du transport sédimentaire en milieux estuariens. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, 328, issue 11:793–799, 2000. (Cité en page 63.)
- J. Bardina, J.H. Ferziger et W.C. Reynolds : Improved subgrid-scale models for large-eddy simulation. In *13th Fluid and Plasma Dynamics Conference*, 1980. (Cité en page 49.)
- S. Bartsch-Winkler et D.K. Lynch : *Catalogue of Worldwide Tidal Bore Occurrences and Characteristics*. US Geological Survey Circular 1022, 1988. (Cité en page 17.)
- A.B. Basset : On the motion of a sphere in a viscous liquid. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 179:43–63, 1888a. (Cité en pages 40 et 43.)
- A.B. Basset : *A treatise on hydrodynamics : with numerous examples*. A Treatise on Hydrodynamics : With Numerous Examples. Deighton, Bell and Co., 1888b. (Cité en page 40.)
- M.H. Bazin et M.H. Darcy : Recherches expérimentales sur la propagation des ondes. *Mémoires présentés par divers savants à l’Académie des Sciences*, 19:495–552, 1865. (Cité en pages 19, 25, 26 et 184.)
- A. Beaudoin, J.-R. de Dreuzy, J. Erhel et G. Pichot : Convergence analysis of macro spreading in 3d heterogeneous porous media. *ESAIM : Proc.*, 41:59–76, 2013. (Cité en pages 136, 138 et 210.)
- A. Beaudoin, S. Huberson et E. Rivoalen : Méthode particulière anisotrope. *Comptes Rendus Mécanique*, 330:51–56, 2002. (Cité en pages 82 et 83.)
- A. Beaudoin, S. Huberson et E. Rivoalen : Simulation of anisotropic diffusion by means of a diffusion velocity method. *Journal of Computational Physics*, 186:122–135, 2003. (Cité en page 71.)

- A. Beaudoin, S. Huberson et E. Rivoalen : Méthode particulière anisotrope pour des écoulements de fluide visqueux. *Comptes Rendus Mécanique*, 332:499–504, 2004. (Cité en page 82.)
- D.A. Benson, R. Schumer, M.M. Meerschaert et S.W. Wheatcraft : Fractional dispersion, lévy motion, and the made tracer tests. *Transport in Porous Media*, 42(1-2):211–240, 2001. (Cité en page 136.)
- D.J. Benson : Computational methods in lagrangian and eulerian hydrocodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99:235–394, 1992. (Cité en page 63.)
- A. Berchet, L. Thomas, P. Braud et L. David : Instantaneous volumic concentration and velocity measurements of a jet in crossflow for the evaluation of the entrainment. *Experiments in Fluids*, 54(12):1–2, 2013. (Cité en pages 119, 120 et 210.)
- F.W. Bessel : *Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels*. Berlin, Konigliche Akademie der Wissenschaften, 1826. (Cité en page 40.)
- S. J. Blott et K. Pye : Gradistat : a grain size distribution and statistics package for the analysis of unconsolidated sediments. *Earth Surface Processes and Landforms*, 26:1237–1248, 2001. (Cité en page 30.)
- N. Bonneton, P. Bonneton, J.-P. Parisot et A. Sottolichio : Ressaut de marée et mascaret – exemples de la garonne et de la seine. In *XIIèmes Journées Nationales Génie Côtier – Génie Civil*, 2012. (Cité en page 24.)
- P. Bonneton, J. van de Loock, J.-P. Parisot, N. Bonneton, A. Sottolichio, G. Detandt, B. Castelle, V. Marieu et N. Pochon : On the occurrence of tidal bores – the garonne river case. *Journal of Coastal Research*, 64:1–4, 2011. (Cité en pages 19 et 28.)
- J. Boussinesq : Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d’un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2^e série(17):55–108, 1872. (Cité en page 28.)
- J. Boussinesq : *Application des potentiels à l’étude de l’équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthier-Villars, 1885a. (Cité en page 40.)
- J. Boussinesq : Sur la résistance qu’oppose un liquide indéfini en repos, sans pesanteur, au mouvement varié d’une sphère solide qu’il mouille sur toute sa surface, quand les vitesses restent bien continues et assez faibles pour que leurs carrés et produits soient négligeables. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences*, 100:935–937, 1885b. (Cité en page 40.)

- N. Bremon tier : *Recherches sur le Mouvement des Ondes*. Imprimerie Firmin Didot, Paris, France, 1809. (Cité en pages 18 et 26.)
- J.M. Buffington : The legend of A.F. Shields. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125:376–387, 1999. (Cité en page 32.)
- J.M. Buffington et D.R. Montgomery : A systematic analysis of eight decades of incipient motion studies, with special reference to gravel-bedded rivers. *Water Resources Research*, 33:1993–2029, 1997. (Cité en page 33.)
- L. Cancino et R. Neves : Hydrodynamic and sediment suspension modelling in estuarine systems : Part i : Description of the numerical models. *Journal of Marine Systems*, 22(2–3):105 – 116, 1999. (Cité en page 62.)
- A.L. Cebile : Le phenomene de mascaret. Rap. tech., Bordeaux, 2010. (Cité en page 25.)
- A.K. Chaniotis, D. Poulikakos et P. Koumoutsakos : Remeshed smoothed particle hydrodynamics for the simulation of viscous and heat conducting flows. *Journal of Computational Physics*, 182(1):67 – 90, 2002. (Cité en page 71.)
- H. Chanson : Ressaut hydraulique ondule : Mythes et realites. *La Houille Blanche*, 7:54–65, 1995. (Cité en page 19.)
- H. Chanson : Flow field in a tidal bore : a physical model. *Proceedings of the 29th IAHR Congress*, 1:365–373, 2001. (Cité en page 27.)
- H. Chanson : *The Hydraulics of Open Channel Flow : An Introduction*. Butterworth-Heinemann, 2nd édn, 2004. (Cité en pages 30 et 33.)
- H. Chanson : Physical modelling of the flow field in an undular tidal bore. *Journal of Hydraulic Research*, 43(3):234–244, 2005. (Cité en pages 19, 20, 24, 28 et 29.)
- H. Chanson : Undular tidal bores : Basic theory and free-surface characteristics. *Journal of Hydraulic Engineering*, 136(11):940–944, 2010a. (Cité en page 20.)
- H. Chanson : Unsteady turbulence in tidal bores : Effects of bed roughness. *Journal Of Waterway, Port, Coastal, And Ocean Engineering*, 136(5):247–256, 2010b. (Cité en page 29.)
- H. Chanson : Current knowledge in tidal bores and their environmental, ecological and cultural impacts. *Environmental Fluid Mechanics*, 11:77–98, 2011. (Cité en pages 19 et 24.)
- H. Chanson et K.K. Tan : Turbulent mixing of particles under tidal bores : an experimental analysis. *Journal of Hydraulic Research*, 48(5):641–649, 2010. (Cité en page 34.)

- J. Chen, L. Cangzi, Z. Chongle et H.J. Walker : Geomorphological development and sedimentation in qiantang estuary and hangzhou bay. *Journal of Coastal Research*, 6(3):559–572, 1990. (Cité en pages 29 et 140.)
- W. Chen : Meshfree boundary particle method applied to helmholtz problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26(7):577 – 581, 2002. (Cité en page 72.)
- Y.-Y. Chen et H.-S. Chen : Lagrangian solution for irrotational progressive water waves propagating on a uniform current : Part 1. fifth-order analysis. *Ocean Engineering*, 88(0):546 – 567, 2014. (Cité en pages 149, 153 et 211.)
- Y.-Y. Chen, H.-C. Hsu et G.-Y. Chen : Lagrangian experiment and solution for irrotational finite-amplitude progressive gravity waves at uniform depth. *Fluid Dynamics Research*, 42(4):045511, 2010. (Cité en pages 149, 153 et 211.)
- Y.-Y. Chen, H.-C. Hsu et H.-H. Hwung : Particle trajectories beneath wave-current interaction in a two-dimensional field. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 19(2):185–197, 2012a. (Cité en pages 149, 152, 153, 156, 184, 201, 202 et 211.)
- Y.-Y. Chen, M.-S. Li, H.-C. Hsu et C.-O. Ng : Theoretical and experimental study of particle trajectories for nonlinear water waves propagating on a sloping bottom. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 370(1964):1543–1571, 2012b. (Cité en pages 149, 153 et 211.)
- J.M. Cherfils : *Développements et applications de la méthode SPH aux écoulements visqueux à surface libre*. Thèse de doctorat, Université du Havre, 2011. (Cité en pages 63 et 65.)
- A.J. Chorin : Numerical study of slightly viscous flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 57:785–794, 1973a. (Cité en page 66.)
- A.J. Chorin : A vortex method for the study of rapid flow. In Henri Cabannes et Roger Temam, édés : *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, vol. 19 de *Lecture Notes in Physics*, p. 100–104. Springer Berlin Heidelberg, 1973b. ISBN 978-3-540-06171-7. (Cité en page 82.)
- A.J. Chorin : Vortex sheet approximation of boundary layers. *Journal of Computational Physics*, 27(3):428–442, 1978. (Cité en page 83.)
- A.J. Chorin et P.S. Bernard : Discretization of a vortex sheet, with an example of roll-up. *Journal of Computational Physics*, 13(3):423–429, 1973. (Cité en page 82.)
- R. Clift, J.R. Grace et M.E. Weber : *Bubbles, Drops, and Particles*. Academic Press, 1978. (Cité en pages 43, 44, 45, 54 et 155.)

- A. Colagrossi et M. Landrini : Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 191(2):448 – 475, 2003. (Cité en page 72.)
- M. Comoy : *Étude pratique sur les marées fluviales et notamment sur les mascarets, application aux travaux de la partie maritime des fleuves*. Imprimerie Gauthier-Villars, Paris, France, 389 pages, 1881. (Cité en pages 18, 26, 27, 28 et 207.)
- C.F. Curtiss et J.O. Hirschfelder : Integration of stiff equations. *P.N.A.S.*, 38 (3):235–243, 1952. (Cité en page 48.)
- H. Darcy : *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Victor Dalmont, Libraire des Corps impériaux des ponts et chaussées et des mines, 1856. (Cité en pages 135, 136 et 137.)
- S.R. de Groot et P. Mazur : *Non-equilibrium Thermodynamics*. Series in physics. North-Holland and Publishing Company, 1962. (Cité en page 37.)
- B. de Saint-Venant : Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Comptes Rendus hebdomadaire des séances de l'Académie des Sciences, Paris, France*, 73:147–154, Séance du 17 Juillet 1871. (Cité en page 28.)
- P. Degond et S. Mas-Gallic : The weighted particle method for convection-diffusion equations part 1 : The case of an isotropic viscosity. *Mathematics of Computation*, 53:485–507, 1989. (Cité en pages 63, 65 et 67.)
- G. Destriau : Le mascaret dans les rivières de gironde. *Annales des Ponts et Chaussées*, 121:609–635, 1951. (Cité en page 28.)
- E. Deutsch : *Dispersion de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire calculée par simulation numérique directe des grandes échelles*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 1992. (Cité en page 48.)
- A.J. Dorgan et E. Loth : Efficient calculation of the history force at finite reynolds numbers. *International Journal of Multiphase Flow*, 33(8):833 – 848, 2007. (Cité en page 48.)
- L.G. du Buat-Nançay : *Principes d'hydraulique vérifiés par un grand nombre d'expériences faites par ordre du Gouvernement*. Paris : Imprimerie de Monsieur, 1786. (Cité en page 40.)
- T.E. Dushane : Convergence for a vortex method for solving euler's equation. *Mathematics of Computation*, 27:719–728, 1973. (Cité en page 82.)
- H. Faxén : Der widerstand gegen die bewegung einer starren kugel in einer zähen flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen wänden eingeschlossen ist. *Annalen der Physik*, 373(10):89–119, 1922. (Cité en pages 40, 41 et 47.)

- C.E. Feehley, C. Zheng et F.J. Molz : A dual-domain mass transfer approach for modeling solute transport in heterogeneous aquifers : Application to the macro-dispersion experiment (made) site. *Water Resources Research*, 36(9):2501–2515, 2000. (Cité en page 136.)
- FES2004 : produced by Legos and CLS Space Oceanography Division and distributed by Aviso, with support from CNES. <http://www.aviso.altimetry.fr>. (Cité en pages 17 et 207.)
- D.A. Fulk et D.W. Quinn : An analysis of 1-d smoothed particle hydrodynamics kernels. *Journal of Computational Physics*, 126(1):165 – 180, 1996. (Cité en page 65.)
- L. Furgerot : *Propriétés hydrodynamiques du mascaret et de son influence sur la dynamique sédimentaire. Une approche couplée en canal et in situ (estuaire de la Sée, Baie du Mont-Saint-Michel)*. Thèse de doctorat, Université de Caen Basse-Normandie, 2014. (Cité en pages 29, 34, 35, 141, 159, 160 et 207.)
- L.W. Gelhar : *Stochastic Subsurface Hydrology*. Prentice-Hall, 1993. ISBN 9780138467678. (Cité en page 138.)
- R.A. Gingold et J.J. Monaghan : Smoothed particle hydrodynamics - theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181:375–389, 1977. (Cité en pages 64 et 126.)
- U.M. Hans : Review : hydrocodes for structures response to underwater explosions. *In Shock and Vibration*, 6(2) : 81 :96, 1999. (Cité en page 63.)
- C.W. Hirt et B.D. Nichols : Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1):201 – 225, 1981. (Cité en page 49.)
- F. Hjulström : Studies of the morphological activity of rivers as illustrated by the river fyris. *In Bulletin of the Geological Institute of Uppsala*, 25, 1935. (Cité en pages 32 et 33.)
- H.C. Hsu : Particle trajectories for waves on a linear shear current. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 14(5):2013 – 2021, 2013. (Cité en pages 149, 153 et 211.)
- R.K. Jain et U.C. Kothyari : Cohesion influences on erosion and bed load transport. *Water Resources Research*, 45:W06410, 2009. (Cité en page 31.)
- N. Jarrin, S. Benhamadouche, D. Laurence et R. Prosser : A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations. Turbulent inflow generation, 2005. (Cité en page 55.)

- A. Jollès et S. Huberson : Correction de l'erreur de projection dans les méthode particules-maillages. *La recherche aérospatiale*, 4:1–6, 1990. (Cité en page 71.)
- C. Koch et C. Chanson : Turbulent mixing beneath an undular bore front. *Journal of Coastal Research*, 24(4):999–1007, 2008. (Cité en pages 20 et 29.)
- D.J. Korteweg et G. de Vries : On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine*, 39:422–443, 1895. (Cité en page 28.)
- P. Koumoutsakos : Multiscale flow simulations using particles. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 37(1):457–487, 2005. (Cité en page 64.)
- S. Kulasegaram, J. Bonet, R. W. Lewis et M. Profit : A variational formulation based contact algorithm for rigid boundaries in two-dimensional sph applications. *Computational Mechanics*, 33(4):316–325, 2004. (Cité en page 72.)
- W. Kutta : Beitrag zur näherungsweise integration totaler differentialgleichungen. *Z. Math. Phys.*, 46:435–453, 1901. (Cité en page 48.)
- S. Laizet et E. Lamballais : High-order compact schemes for incompressible flows : A simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. *Journal of Computational Physics*, 228:5989–6015, 2009. (Cité en page 87.)
- H. Lamb : *Hydrodynamics*. Cambridge : University Press, 1932. (Cité en page 20.)
- C. J. Lawrence et S. Weinbaum : The force on an axisymmetric body in linearized, time-dependent motion : a new memory term. *Journal of Fluid Mechanics*, 171:209–218, 10 1986. (Cité en page 46.)
- L.D. Libersky, A.G. Petschek, T.C. Carney, J.R. Hipp et F.A. Allahdadi : High strain lagrangian hydrodynamics : A three-dimensional sph code for dynamic material response. *Journal of Computational Physics*, 109(1):67–75, 1993. (Cité en page 72.)
- P. Lubin, S. Glockner et H. Chanson : Numerical simulation of a weak breaking tidal bore. *Mechanics Research Communications*, 37:119–121, 2010. (Cité en page 19.)
- P. Lubin et H. Lemonnier : Propagation of solitary waves in constant depths over horizontal beds (pa, pn, pe). *Multiphase Science and Technology*, 16:239–250, 2004. (Cité en page 179.)
- L.B. Lucy : A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, 82:1013–1024, 1977. (Cité en page 64.)
- M.R. Maxey : The motion of small spherical particles in a cellular flow field. *Physics of Fluids*, 30(7):1915–1928, 1987. (Cité en page 47.)

- M.R. Maxey et J.J. Riley : Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Physics of Fluids*, 26:883–889, 1983. (Cité en pages 39, 40, 42, 43, 46, 47, 48, 51, 52, 55, 56, 60, 187, 188, 191, 195 et 196.)
- N. Mazumder et S. Bose : Formation and propagation of tidal bore. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 121(3):167–175, 1995. (Cité en page 28.)
- E.E. Michaelides : The transient equation of motion for particles, bubbles and droplets. *Journal of fluids engineering*, 119(2):233–247, 1997. (Cité en page 44.)
- S.A. Miedema : Constructing the shields curve, a new theoretical approach and its applications. In *WODCON XIX, Beijing China*, 2010. (Cité en pages 33 et 207.)
- C. Migniot : Rétablissement du caractère maritime du Mont Saint-Michel : Synthèse générale des connaissances sur les problèmes hydro-sédimentaires, 1997. (Cité en page 34.)
- J.P. Minier : Construction de la trajectoire d’une particule dans un écoulement turbulent. Rap. tech., Électricité de France, Chatou, France, 1988. (Cité en page 42.)
- J. Monaghan, A. Kos et N. Issa : Fluid motion generated by impact. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 129(6):250–259, 2003. (Cité en page 72.)
- J.J. Monaghan et J.B. Kajtar : {SPH} particle boundary forces for arbitrary boundaries. *Computer Physics Communications*, 180(10):1811 – 1820, 2009. (Cité en page 72.)
- J.S. Montes et H. Chanson : Characteristics of undular jumps : experiments and analysis. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(2):192–205, 1998. (Cité en pages 19 et 20.)
- D.W. Moore : *The Discrete Vortex Approximation of a Finite Vortex Sheet*. Defense Technical Information Center, 1971. (Cité en page 82.)
- F.A. Morrison : *Introduction to fluid mechanics*. Cambridge University Press, 2013. (Cité en pages 43 et 45.)
- D. Mouaze, H. Chanson et B. Simon : Field measurements in the tidal bore of the sélune river in the bay of mont saint michel (september 2010). Rap. tech., University Of Queensland, 2010. (Cité en pages 19 et 29.)
- T.J. Murphy et J.L. Aguirre : Brownian motion of N interacting particles. i. extension of the einstein diffusion relation to the N-particle case. *The Journal of Chemical Physics*, 57(5):2098–2104, 1972. (Cité en page 37.)

- P.T. Nam, M. Larson, H. Hanson et L.E. Hoan : A numerical model of nearshore waves, currents, and sediment transport. *Coastal Engineering*, 56(11–12):1084 – 1096, 2009. (Cité en page 62.)
- I. Newton et G.E.L.T. de Breteuil Du Châtelet : *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, vol. 1 de *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*. Chez Desaint & Saillant, 1759. (Cité en page 42.)
- F. Odar et W.S. Hamilton : Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 18:302–314, 2 1964. (Cité en page 44.)
- G. Oger, M. Doring, B. Alessandrini et P. Ferrant : Two-dimensional {SPH} simulations of wedge water entries. *Journal of Computational Physics*, 213(2):803 – 822, 2006. (Cité en page 72.)
- C.W. Oseen : *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*. Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft, 1927. (Cité en pages 40, 43, 45, 51 et 191.)
- D. Paphitis : Sediment movement under unidirectional flows : an assesment of empirical threshold curves. *Coastal Engineering*, 43:227–245, 2001. (Cité en page 33.)
- N.A. Patankar et D.D. Joseph : Lagrangian numerical simulation of particulate flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 27(10):1685–1706, 2001. (Cité en page 63.)
- A.J. Peterka : Hydraulic design of stilling basins and energy dissipators. Rap. tech., Bureau of Reclamation, 1957. (Cité en pages 20, 22 et 207.)
- S.-D. Poisson : Mémoires sur les mouvements simultanés d’un pendule et de l’air environnant. *Mémoires présentés par divers savants à l’Académie des Sciences*, 11:521–581, 1831. (Cité en page 40.)
- H. Postma : Sediment transport and sedimentation in the estuarine environment. *Estuaries, American Assocociation for the Advancement of Science, Washington D.C.*, 83:158–179, 1967. (Cité en page 32.)
- J. Pozorski et J.-P. Minier : On the lagrangian turbulent dispersion models based on the langevin equation. *International Journal of Multiphase Flow*, 24(6):913 – 945, 1998. (Cité en page 50.)
- M.W. Reeks et S. McKee : The dispersive effects of basset history forces on particle motion in a turbulent flow. *Physics of Fluids (1958-1988)*, 27(7):1573–1582, 1984. (Cité en pages 43 et 46.)
- J.R. Rice : *Approximation des fonctions theorie lineaire*. Paris Dunod, 1969. (Cité en page 107.)

- A. Ritter : Die fortpflanzung de wasserwellen. *Zeitschrift Verein Deutscher Ingenieure*, 36(33):947–954, 1892. (Cité en page [29](#).)
- L. Rosenhead : The spread of vorticity in the wake behind a cylinder. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 127:590–612, 1930. (Cité en page [82](#).)
- L. Rosenhead : The formation of vortices from a surface of discontinuity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 134(823):170–192, 1931. (Cité en pages [82](#) et [83](#).)
- C. Runge : Ueber die numerische auflösung von differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, 46(2):167–178, 1895. (Cité en page [48](#).)
- J.S. Russell : Report on waves. Rap. tech., Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844. London : John Murray. 311–390, Plates XLVII–LVII., 1845. (Cité en pages [156](#), [184](#), [185](#), [186](#), [187](#), [189](#) et [213](#).)
- P. Sagaut : *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible*. Springer-Verlag, 1998. (Cité en page [49](#).)
- T. Sano : Unsteady flow past a sphere at low reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 112:433–441, 11 1981. (Cité en page [46](#).)
- R. Schechter H.and Bridson : Ghost sph for animating water. *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 2012)*, 31(4), 2012. (Cité en page [72](#).)
- L. Schiller et A. Naumann : Über die grundlegenden berechnungen bei der schwekrafthaubereitung. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 77(12):318–320, 1933. (Cité en pages [43](#) et [45](#).)
- A. Shields : Application of similarity principles and turbulence research to bed-load movement. California Institute of Technology , Pasadena, CA. (translated by Ott, W. P. and van Uchelen, J. C.), 1936. (Cité en pages [32](#) et [33](#).)
- B. Simon : *Effects of tidal bores on turbulent mixing : a numerical and physical study in positive surges*. Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies - Bordeaux et University of Queensland, 2013. (Cité en pages [29](#), [47](#), [49](#), [55](#), [141](#), [144](#), [145](#), [179](#) et [211](#).)
- J.C. Simpson : Numerical techniques for three-dimensional smoothed particle hydrodynamics simulations : applications to accretion disks. *The Astronomical Journal*, 448:822–831, 1995. (Cité en page [70](#).)
- J.H. Simpson, N.R. Fisher et P. Wiles : Reynolds stress and tke production in an estuary with a tidal bore. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 60:619–627, 2004. (Cité en page [29](#).)

- J. Smagorinsky : General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, 91(3):99–164, 1963. (Cité en pages 11 et 49.)
- Y.D. Sobral, T.F. Oliveira et F.R. Cunha : On the unsteady forces during the motion of a sedimenting particle. *Powder Technology*, 178:131–143, 2007. (Cité en pages 51, 55, 191 et 195.)
- J.J. Stoker : *Water Waves : The Mathematical Theory with Applications*. Interscience Publishers, 1957. (Cité en pages 20 et 29.)
- G.G. Stokes : On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8:287–319, 1845. (Cité en pages 40, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54, 55, 56 et 207.)
- G.G. Stokes : On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9:8, 1850. (Cité en pages 135 et 191.)
- A. Sundborg : The river klaralven, chapter 2 : The morphological activity of flowing water erosion of the stream bed. *Geografiska Annaler*, 38:165–221, 1956. (Cité en page 32.)
- A.J. Sutherland : Proposed mechanism for sediment entrainment by turbulent flows. *Journal of Geophysical Research*, 72(24):6183–6194, 1967. (Cité en page 34.)
- C.M. Tchen : *Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid*. Springer Netherlands, 1947. (Cité en page 40.)
- Z.H. Teng : Elliptic-vortex method for incompressible flow at high reynolds number. *Journal of Computational Physics*, 46(1):54–68, 1982. (Cité en page 82.)
- Zhen-huan Teng : Variable-elliptic-vortex method for incompressible flow simulation. In F.G. Zhuang et Y.L. Zhu, édés : *Tenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, vol. 264 de *Lecture Notes in Physics*, p. 600–605. Springer Berlin Heidelberg, 1986. ISBN 978-3-540-17172-0. (Cité en page 83.)
- B. Tessier et J.H.J. Terwindt : An example of soft-sediment deformations in an intertidal environment - the effect of a tidal bore. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 319:217–233, 1994. (Cité en page 29.)
- Thétis : <http://thetis.enscbp.fr>. (Cité en pages 15, 47, 48, 55, 75, 141, 144, 145, 179, 187 et 211.)

- Y. Tominaga et T. Stathopoulos : Turbulent schmidt numbers for {CFD} analysis with various types of flowfield. *Atmospheric Environment*, 41(37):8091 – 8099, 2007. (Cité en page 75.)
- T.S. Tricco et D.J. Price : Constrained hyperbolic divergence cleaning for smoothed particle magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 231(21):7214 – 7236, 2012. (Cité en page 118.)
- D. Uminsky, C.E. Wayne et A. Barbaro : A multi-moment vortex method for 2d viscous fluids. *Journal of Computational Physics*, 231(4):1705–1727, 2012. (Cité en pages 104 et 113.)
- M. van Aartrijk et H.J.H. Clercx : Vertical dispersion of light inertial particles in stably stratified turbulence : The influence of the basset force. *Physics of Fluids*, 22(1):013301, 2010. (Cité en page 59.)
- M.A.T. van Hinsberg, J.H.M. ten Thije Boonkkamp et H.J.H. Clercx : An efficient, second order method for the approximation of the basset history force. *Journal of Computational Physics*, 230(4):1465–1478, 2011. (Cité en pages 46, 48, 52, 53 et 195.)
- S. Vincent et J.-P. Caltagirone : Test-case no 17 : dam-break flows on dry and wet surfaces (pn, pa, pe). *Multiphase Science and Technology*, 16(1-3):111–115, 2004. (Cité en page 179.)
- Q. Wang et K.D. Squires : Large eddy simulation of particle-laden turbulent channel flow. *Physics of Fluids*, 8(5):1207–1223, 1996. (Cité en page 50.)
- K. Weierstrass : Über die analytische darstellbarkeit sogenannter willkürlicher functionen einer reellen veränderlichen. *Sitzungsber. Akad. Berlin*, 2:633–639, 789–805, 1885. (Cité en page 106.)
- C.K. Wentworth : A scale of grade and class terms for clastic sediments. *The Journal of Geology*, 30:377–392, 1922. (Cité en pages 30 et 205.)
- F. M. White : *Viscous fluid flow, 3rd edition*, chap. 3-9, p. 175. McGraw-Hill, 2006. (Cité en pages 43 et 45.)
- G.B. Whitham : The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 227:399–407, 1955. (Cité en page 29.)
- G. Wiedemann : Über die bewegung der flüssigkeiten im kreise der geschlossenen galvanischen säule und ihre beziehungen zur elektrolyse. *Annalen der physik*, 175:177–233, 1856. (Cité en page 42.)

-
- E. Wolanski, D. Williams, S. Spagnola et H. Chanson : Undular tidal bore dynamics in the daly estuary, northern australia. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 60:629–636, 2004. (Cité en pages [19](#) et [25](#).)
- H.H. Yeh et K.M. Mok : On turbulence in bores. *Physics of Fluids*, 2:821–828, 1990. (Cité en page [29](#).)
- Z. Zhang et Q. Chen : Comparison of the eulerian and lagrangian methods for predicting particle transport in enclosed spaces. *Atmospheric Environment*, 41: 5236–5248, 2007. (Cité en page [63](#).)